

# 幅相误差对稀疏阵天线性能的影响\*

邱力军 周智敏 梁甸农

(国防科技大学电子技术系 长沙 410073)

**摘要** 围绕天线阵增益、波束宽度、指向和副瓣电平等指标,分析了幅相误差、阵元失效对稀疏阵列天线性能的影响。应用概率统计原理,导出了具有幅相误差、阵元失效时稀疏阵天线阵增益损失、波束宽度、指向、副瓣电平的估计公式、并得出一些有益结论。

**关键词** 稀疏阵, 幅相误差, 阵元失效, 增益损失, 波束宽度, 副瓣电平

**分类号** TN820

## Effect of Amplitude-phase Errors on the Performance of Sparse Array Antennas

Qiu Lijun Zhou Zhimin Liang Diannong

(Department of Electronic Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** This paper analyzes the effects of amplitude-phase errors and element failure on antenna gain, beam width, beam direction, and sidelobe level in sparse array. With the help of statistic principle, the estimation formulas of the antenna gain loss, beam width and sidelobe level in sparse array are derived.

**Key words** sparse array, amplitude-phase errors, element failure, gain loss, sidelobe level, beam width

实际天线系统都存在物理和电的误差,稀疏阵列也不例外。不管什么原因产生的误差,最终都表现为各路幅相误差,这些误差将直接影响天线性能。通常可把误差分为两大类,一类是系统可补偿的,另一类是随机的。系统误差(如互耦、通道的不一致性等)一般可预先测量或实时测量,再进行适当的校正或补偿;而随机误差(包括对缓变测量误差和校正的精度有限而引起的误差)一般是无法加以补偿的,因此是限制天线性能的最终因素。幅相误差对天线性能影响很大,而且将大大影响 ADBF 的性能。虽然在这方面已有较多的研究,但很少见到在系统级上进行研究的报道,特别是针对有关稀疏阵系统的研究报道还未见到。因此为了稀疏相控阵系统的实际应用,很有必要在这方面进一步深入研究。

### 1 稀疏阵波瓣的统计特性分析

图 1 给出二维矩形平面阵列天线结构示意图,其栅格按矩形网格排列,共有  $M \times N$  个。假定阵列中的单元都是无方向性,则无误差时稀疏阵列天线的波瓣函数为

$$E(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_{mn} \exp[j(mu + nv)] \quad (1)$$

式中,  $u = kd_x (\sin\theta \cos\varphi - \sin\theta_0 \cos\varphi_0)$ ,  $v = kd_y (\sin\theta \sin\varphi - \sin\theta_0 \sin\varphi_0)$ ,  $d_x, d_y$  分别是沿着行和列的单元间距;  $\theta_0, \varphi_0$  为主瓣方向;  $\lambda$  为工作波长,  $k = 2\pi/\lambda$ 。对于给定的稀疏阵,其  $I_{mn}$  由所要求的波瓣形状即参考电流分布决定<sup>[1~3]</sup>。如果  $I_{mn}$  采用一阶振幅量化密度加权,即假定每一栅格都给定放有源单元的概

\* 国家 863 计划资助项目  
1997 年 7 月 7 日收稿  
第一作者: 邱力军, 男, 1964 年生, 博士

率  $A_{mn}$ , 则表示为

$$I_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{概率 } A_{mn} \\ 0 & \text{概率 } 1 - A_{mn} \end{cases} \quad (2)$$

式中  $A_{mn}$  为归一化参考电流分布在栅格  $m \times n$  处的大小, 所形成的参考波瓣为

$$E_0(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \exp[j(mu + nv)] \quad (3)$$

由于阵列的馈电方式可以是行馈或列馈, 所以电流的幅相误差包括独立的幅相误差  $\delta_{mn}, \varphi_{mn}$  以及行或列相关幅相误差, 即  $\delta_m, \varphi_m$  或  $\delta_n, \varphi_n$ 。在固态有源相控阵天线阵中, 每个天线单元后面都接有  $T/R$  组件, 当单元本身损坏或  $T/R$  组件失效时, 称之为单元失效。一个单元失效与另一个单元失效之间并没有必然的联系, 用概率论的观点来看, 两者可以看作是相互独立的。在误差与单元失效共存的情况下, 式 (1) 可以表示成

$$E(u, v) = \sum_m \sum_n I_{mn} f_{mn} (1 + \delta_m)(1 + \delta_n)(1 + \delta_{mn}) \exp[j(\varphi_m + \varphi_n + \varphi_{mn})] \exp[j(mu + nv)] \quad (4)$$

式中, 行馈时  $\delta_m = \varphi_m = 0$ , 列馈时  $\delta_n = \varphi_n = 0$ ,  $f_{mn}$  为失效因子, 它满足以下分布

$$f_{mn} = \begin{cases} 0, P_f \\ 1, 1 - P_f \end{cases} \quad (5)$$

这里,  $P_f$  为失效率。可以求得  $f_{mn}$  和  $f_{mn}^2$  的均值为

$$\langle f_{mn} \rangle = \langle f_{mn}^2 \rangle = 1 - P_f \quad (6)$$

可以假设  $\delta_{mn}, \varphi_{mn}, \delta_m, \varphi_m, \delta_n, \varphi_n, f_{mn}$  分别为相互独立的随机变量, 而  $\delta_{mn}, \varphi_{mn}, \delta_m, \varphi_m, \delta_n, \varphi_n$  满足均值为 0 的正态随机分布, 它们的方差为

$$\begin{aligned} D(\delta_n) &= \sigma_{rA}^2, D(\varphi_n) = \sigma_{r\varphi}^2, D(\delta_m) = \sigma_{tA}^2 \\ D(\varphi_m) &= \sigma_{t\varphi}^2, D(\delta_{mn}) = \sigma_{rA}^2, D(\varphi_{mn}) = \sigma_{t\varphi}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

行馈时, 式 (4) 变成

$$E(u, v) = \sum_m \sum_n I_{mn} f_{mn} (1 + \delta_n)(1 + \delta_{mn}) \exp[j(\varphi_n + \varphi_{mn})] \exp[j(mu + nv)] \quad (8)$$

推导可得具有幅相误差的稀疏阵列天线的统计特性:

(1) 波瓣均值

$$\overline{E(u, v)} = (1 - P_f) \Phi_r(1) \Phi_i(1) \sum_m \sum_n \langle I_{mn} \rangle \exp[j(mu + nv)] = (1 - P_f) \Phi_r(1) \Phi_i(1) E_0(u, v) \quad (9)$$

式中, 符号  $\bar{\cdot}, \langle \cdot \rangle$  均表示求均值;  $\Phi_r(1)$  和  $\Phi_i(1)$  分别为随机变量  $\varphi_n$  和  $\varphi_{mn}$  的特征函数。即

$$\Phi_r(1) = \langle \exp(j\varphi_n) \rangle \approx 1 - \sigma_{r\varphi}^2/2, \Phi_i(1) = \langle \exp(j\varphi_{mn}) \rangle \approx 1 - \sigma_{t\varphi}^2/2 \quad (10)$$

(2) 波瓣方差

经仔细推导, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= (1 - P_f)(1 + \sigma_{rA}^2)(1 + \sigma_{tA}^2) \sum_m \sum_n A_{mn} - (1 - P_f)^2 \{ \Phi_r^2(1) \Phi_i^2(1) \} \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \\ &\quad + (1 + \sigma_{rA}^2 - \Phi_r^2(1)) \Phi_i^2(1) \sum_n \left| \sum_m A_{mn} \exp(jmu) \right|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

令  $P_f = 0$ , 并将其代入式 (11), 得只有幅相误差存在时的波瓣方差

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= (1 + \sigma_{rA}^2)(1 + \sigma_{tA}^2) \overline{N_E} - \Phi_r^2(1) \Phi_i^2(1) \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \\ &\quad + (1 + \sigma_{rA}^2 - \Phi_r^2(1)) \Phi_i^2(1) \sum_n \left| \sum_m A_{mn} \exp(jmu) \right|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $\overline{N_E}$  为稀疏阵有源单元个数的均值。由于  $I_{mn}$  采用一阶振幅量化密度加权, 因此单元激励振幅为 1

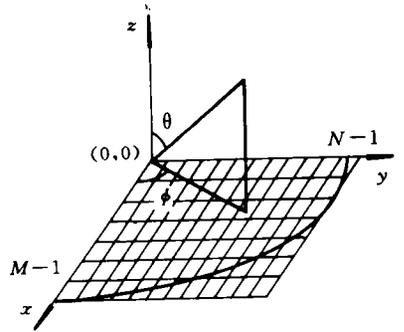


图 1 共有  $M \times N$  个栅格的平面阵列及坐标系

(如果有有源单元) 或为 0 (无有源单元), 单元的总数等于所有的  $I_{mn}$  的和, 则有源单元总数  $N_E$  的均值为

$$\overline{N_E} = \langle \sum_m \sum_n I_{mn} \rangle = \sum_m \sum_n \langle I_{mn} \rangle = \sum_m \sum_n A_{mn} \leq M \times N \quad (13)$$

令  $\sigma_{rA} = \sigma_{r\varphi} = 0$ ,  $\sigma_{iA} = \sigma_{i\varphi} = 0$ , 得只有单元失效时的波瓣方差

$$\sigma_f^2 = (1 - P_f) \overline{N_E} - (1 - P_f)^2 \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \quad (14)$$

### (3) 功率波瓣均值

考虑到

$$\overline{P(u, v)} = \langle E(u, v) E^*(u, v) \rangle = \sigma_E^2 + |\langle E(u, v) \rangle|^2 \quad (15)$$

将式 (9) 和 (11)、(12)、(14) 代入式 (15), 得具有幅相误差时的功率波瓣均值。

列馈时, 也有上述类似的结果。

## 2 幅相误差对稀疏阵列天线主要性能指标的影响

### 2.1 天线增益

在理想情况下, 天线的方向性增益由式 (3) 可表示为

$$G_0 = 4\pi P_0(0, 0) / \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_0(u, v) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (16)$$

有误差时, 天线增益由式 (15) 可近似为

$$G = 4\pi \overline{P(0, 0)} / \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(u, v)} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (17)$$

利用式 (15), 可得行馈时天线增益

$$G \approx G_0 / [1 + P_f(1 + \sigma_{rA}^2 + \sigma_{iA}^2) / (1 - P_f) + \sigma_{iA}^2 + \sigma_{i\varphi}^2 + \sigma_{rA}^2 + \sigma_{r\varphi}^2] \quad (18)$$

上式表明, 存在阵元失效和幅相误差时, 对于天线增益影响较大, 阵元失效实际上是减少了阵元数。

### 2.2 平均波瓣宽度

在研究面阵的波瓣宽度时, 一般是研究某个平面内波瓣宽度, 如  $E$  面和  $H$  面。在此我们给出  $\varphi = \varphi_0$  这一任意幅角平面的波瓣宽度的概率表达式。假定

$$r_{mn} = x_m \cos\varphi_0 + y_n \sin\varphi_0 \quad (19)$$

式中  $x_m = md_x$ ,  $y_n = nd_y$ 。此时, 理想情况式 (3) 可写成

$$E_0(u, v) = E_0(\varphi) = \sum_m \sum_n A_{mn} \exp(jr_{mn}\varphi) \quad (20)$$

式中  $\varphi = K(\sin\theta - \sin\theta_0)$ 。可见, 该式与线阵公式相似。因此将已知线阵的公式作相应的替换, 即可推得其波瓣宽度的近似表达式

$$BW_0 = 2\varphi_1 = -P_0(0) / P_0(\varphi_1) \quad (21)$$

在一般情况下, 讨论的是针状波瓣, 波瓣最大值方向在  $\varphi = 0$ 。式中,  $\varphi = \varphi_1$  是其一个半功率点,  $\varphi = -\varphi_1$  是另一个半功率点,  $P_0(0) = |E_0(0)|^2 = |\overline{N_E}|^2$  为  $\varphi = 0$  时的功率波瓣,  $P_0(\varphi_1)$  为  $P_0(\varphi)$  在  $\varphi = \varphi_1$  处的导数。

存在误差时, 其功率波瓣为  $P(\varphi)$ 。假定  $\varphi_2$  为波瓣的一个半功率点, 在一般情况下, 有

$$\overline{P(-\varphi_2)} = -\overline{P'(\varphi_2)} \quad (22)$$

式中,  $P(\varphi_2)$  为  $P(\varphi)$  在  $\varphi = \varphi_2$  处的导数。同理, 利用与上述大致类似步骤, 将  $P(\varphi)$  在  $\varphi = \varphi_2$  和  $\varphi = -\varphi_2$  点展开, 并考虑到  $P(\varphi_2) = P(-\varphi_2) = P(0) / 2$ , 可得波瓣宽度均值的表达式

$$\overline{BW} = -\overline{P(0)} / \overline{P'(\varphi_2)} \approx -\overline{P(0)} / \overline{P'(\varphi_1)} \quad (23)$$

利用式 (15), 并忽略高次项, 可得

$$\overline{P(0)} \approx (1 - P_f)(\sigma_{rA}^2 + \sigma_{iA}^2) \overline{N_E} - (1 - P_f)^2 \{\Phi_f^2(1) \Phi_f^2(1) \sum_m \sum_n A_{mn}^2$$

$$+ (\sigma_{r_A}^2 + \Phi_{\varphi}^2) \sum_m \left| \sum_n A_{mn} \right|^2 + (1 - P_f)^2 |\Phi_r(1)\Phi_i(1)|^2 |\overline{N_E}|^2 \quad (24)$$

并考虑到

$$\overline{P'(\varphi_1)} = (1 - P_f)^2 \Phi_r^2(1)\Phi_i^2(1)P'_0(\varphi_1) \quad (25)$$

将式(24)、(25)代入式(23), 得

$$\overline{BW} \approx [-|\overline{N_E}|^2/P'_0(\varphi_1)](1 + \sigma_k^2) = BW_0(1 + \sigma_k^2) \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 = & \{(\sigma_{r_A}^2 + \sigma_{r_A}^2) \overline{N_E}/(1 - P_f) - \Phi_r^2(1)\Phi_i^2(1) \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \\ & - (\sigma_{r_A}^2 + \Phi_{\varphi}^2) \sum_m \left| \sum_n A_{mn} \right|^2\} / \{|\Phi_r(1)\Phi_i(1)|^2 |\overline{N_E}|^2\} \end{aligned} \quad (27)$$

上式表明, 阵元失效、幅相误差对波束宽度影响较小。对于大阵并且稀疏率较大时, 该影响可不考虑。

### 2.3 平均指向误差

类似上述方法, 存在误差时, 在  $\varphi = \varphi_0$  这一任意幅角平面的功率波瓣为

$$\begin{aligned} P(\vartheta) = |E(\vartheta)|^2 = & \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} f_{mn} f_{kl} (1 + \delta_m) \\ & (1 + \delta_k)(1 + \delta_{mn})(1 + \delta_{kl}) \cos(r_{mk}\vartheta + \varphi_{mk}) \end{aligned} \quad (28)$$

式中,  $r_{mk} = r_{mn} - r_{kl}$ ,  $\varphi_{mk} = \varphi_m - \varphi_k + \varphi_{mn} - \varphi_{kl}$ ,  $r_{mn}$ ,  $r_{kl}$  如式(19)所示。

波束指向  $\partial P(\vartheta)/\partial \vartheta = 0$ , (在  $\vartheta = 0$  附近) 处, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\vartheta)}{\partial \vartheta} = & - \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} f_{mn} f_{kl} (1 + \delta_m)(1 + \delta_k) \\ & (1 + \delta_{mn})(1 + \delta_{kl}) r_{mk} \sin(r_{mk}\vartheta + \varphi_{mk}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

设  $\varphi_{mk} \ll 1$ , 且指向误差也很小, 故在主瓣方向可做如下近似

$$\sin(r_{mk}\vartheta + \varphi_{mk}) \approx r_{mk}\vartheta + \varphi_{mk} \quad (30)$$

这样由式(29)和式(30)得

$$\vartheta = - \frac{\sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} f_{mn} f_{kl} (1 + \delta_m)(1 + \delta_k)(1 + \delta_{mn})(1 + \delta_{kl}) r_{mk} \varphi_{mk}}{\sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} f_{mn} f_{kl} (1 + \delta_m)(1 + \delta_k)(1 + \delta_{mn})(1 + \delta_{kl}) r_{mk}^2} \quad (31)$$

上式说明, 相位误差对波束指向误差起主要作用。事实上, 如果没有相位误差, 只有幅度误差是不会改变波束指向的, 再由误差很小的假设, 式(31)可近似写为

$$\vartheta = - \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} r_{mk} \varphi_{mk} / \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l I_{mn} I_{kl} r_{mk}^2 \quad (32)$$

显然, 平均波束指向误差

$$\langle \vartheta \rangle = 0 \quad (33)$$

上式表明, 阵元失效、幅相误差很小时, 对波束指向基本没有影响。相位误差对波束指向误差起主要作用, 与阵元位置无关。

### 2.4 平均副瓣电平

主瓣增益、波束宽度和指向都是描述的主瓣特征。结果表明, 不大的幅相误差对主瓣部分的影响较小。而在这里分析误差对副瓣电平的影响, 下面将会看到, 这种影响是较大的, 特别是当副瓣电平较低的时候。

由式(15)可得, 存在误差时的功率波瓣均值

$$\overline{P(u, v)} = \sigma_E^2 + (1 - P_f)^2 |\Phi_r(1)\Phi_i(1)|^2 \langle |E_0(u, v)|^2 \rangle \quad (34)$$

考虑到  $P_0(u, v) = |E_0(u, v)|^2$ ,  $P_0(0, 0) = |\overline{N_E}|^2$  并利用式(24)结果, 在大阵并且  $\overline{N_E}$  较大时, 所得近似表达式

$$\overline{P(0, 0)}/P_0(0, 0) \approx (1 - P_f)^2 |\Phi_r(1)\Phi_i(1)|^2 \quad (35)$$

则归一化功率波瓣均值 (对  $P(0, 0)$  归一) 为

$$\frac{\overline{P(u, v)}}{\overline{P(0, 0)}} = \frac{P_o(u, v)}{P_o(0, 0)} + \frac{\sigma_E^2}{(1 - P_f)^2 |\Phi_r(1)\Phi_t(1)|^2 \overline{N_E}} \quad (36)$$

可见，上式右边第一项是理想情况下的归一化功率波瓣，第二项是与误差和阵列参数有关的常数项，即误差引起了平均副瓣电平升高。在主瓣部分，第一项起主要作用，故误差的影响较小；但在副瓣部分，第一项本身很小，第二项的作用就较大。

由于一般无误差时稀疏阵功率波瓣在大角度副瓣值都很小 ( $-50\text{dB}$  以下)，因此，根据式 (36) 的结论，稀疏阵列天线平均功率波瓣的副瓣值为

$$\overline{SSL} \approx \text{式(36) 右边第二项} = \sigma_E^2 / [(1 - P_f)^2 |\Phi_r(1)\Phi_t(1)|^2 \overline{N_E}] \quad (37)$$

为了简化计算，令相关幅相误差为 0 ( $\sigma_{rA}^2 = \sigma_{r\varphi}^2 = 0$ )，则式 (11) 为

$$\sigma_E^2 \approx (1 - P_f)(1 + \sigma_{rA}^2) \overline{N_E} - (1 - P_f)^2 \Phi_r^2(1) \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \quad (38)$$

把上式代入式 (37) 得

$$\overline{SSL} \approx (1 + \sigma_{rA}^2) / [(1 - P_f) \Phi_r^2(1) \overline{N_E}] - \sum_m \sum_n A_{mn}^2 / |\overline{N_E}|^2 \quad (39)$$

明显可见，幅相误差对稀疏阵列天线平均功率波瓣的副瓣电平影响较大。随着稀疏率增大并且阵面较大时，该影响逐渐减小。阵元失效是最严重的幅度误差，其使得平均功率副瓣电平进一步升高， $P_f$  越大、失效阵元的位置离阵中心越近，平均副瓣电平升高的越多。

本文采用参考分布和统计设计方法，设计出一种稀疏率为 36% 的密度加权阵面，其具有  $-20\text{dB}$  Taylor 副瓣加权，阵面排列模型如图 2 所示。这里采用矩形栅格，单元间距为  $d_x = d_y = 0.528\lambda_{\min}$ ，单元总数  $MN = 348$ ，其中有源单元数  $N_E = 128$ 。经计算，图 3 (虚线) 给出  $\varphi = 0^\circ$  时该阵面的二维波瓣图。当存在幅相误差时，假定  $\sigma_{rA}^2 = \sigma_{r\varphi}^2 = 0.01$ ，其所对应的二维波瓣图如图 3 (实线) 所示。由图可见，幅相误差使得稀疏阵列天线波瓣的副瓣电平明显增大，对波束指向和波束宽度基本没有影响，与上述分析所得结果完全吻合。

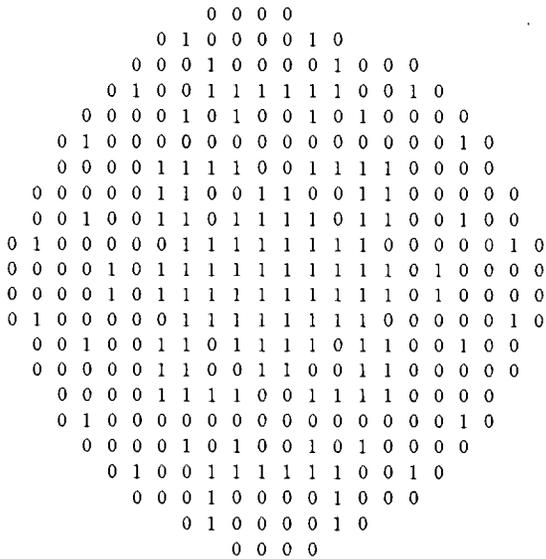


图 2 稀疏面阵阵元排列模型

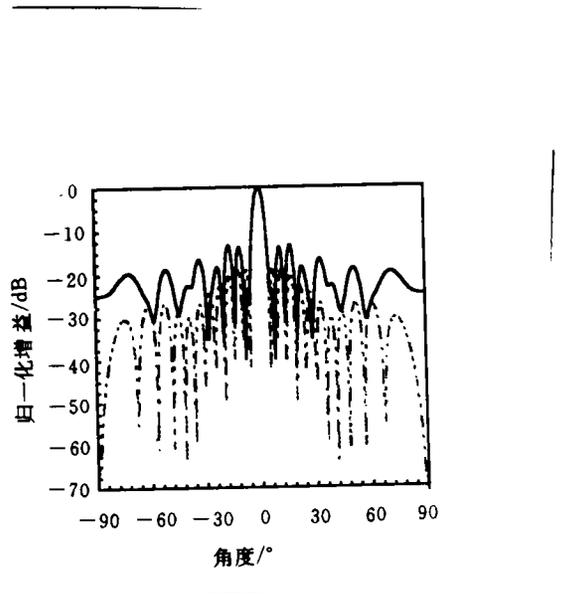


图 3 稀疏阵 ( $\varphi = 0^\circ$ ) 二维波瓣图

### 3 结束语

以上研究结果表明,幅相误差与阵元失效对稀疏阵列天线副瓣电平的影响最严重,其次是主瓣增益,对波束指向和波束宽度影响较小。副瓣电平的升高不仅取决于相对失效阵元数和失效阵元的位置,而且与稀疏率及阵面大小有关。阵元失效与幅相误差相比,哪个大哪个就起主要作用。幅相误差与阵元失效的确定,取决于系统的性能指标,指标越高,所允许的幅相误差越小、阵元失效越低。本文虽然是针对稀疏相控阵天线分析的,但所有结论均可以推广至其它形式的平面阵列天线。

### 参考文献

- 1 Qiu Lijun Zhou Zhimin. Studies of Adaptive Beamforming for Sparse Phased Array Radar. SPIE Proceedings, 1996 (7)
- 2 梁旬农,周智敏,邱力军等. 数字自适应波束形成技术及实验研究. 信息获取与处理技术, 1995 (1)
- 3 郭燕昌等. 相控阵和频率扫描天线原理. 北京国防工业出版社, 1978
- 4 James K H. Array Sidelobe, Error Tolerance, Gain and Beamwidth. ADA147004, 1984
- 5 Hsiao J K. Normalized Relationship Among Errors and Sidelobe Level. Radio Science, 1984, 19 (1)
- 6 邵江达,郭燕昌. 激励误差对子阵阵列天线副瓣电平的影响. 系统工程与电子技术, 1992
- 7 汪茂光等. 阵列天线分析与综合. 成都: 电子科技大学出版社, 1989