国 防 科 技 大 学 学 报
第 20 卷 第 1 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 20 No. 1 1998

分形信号的滤波算法*

罗建书　柳志刚　黄建华

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　提出了分形信号的小波分解与重构的一种快速算法。针对分形信号的自相似和长时相关的特点，采用离散小波变换（DWT）对分形信号进行多尺度分解，使其成为各尺度上的近似平稳信号，从而可利用通常的 Wiener 滤波或 Kalman 滤波方法进行估计，然后再由 DWT 进行多尺度重构，估计出被噪声污染了的原始信号。重点对 DWT 的滤波过程进行算法设计，并估计了计算复杂度。

关键词　分形信号，离散小波变换，快速傅立叶变换，滤波器。

分类号　TN911.7

Filter algorithoms for fractal signals

Luo Jianshu　Liu Zhigang　Huang Jianhua

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In this paper, a fast algorithm for the fractal signal wavelet decomposition and reconstruction is put foreward. In accordance with the selfsimilar and long-term related characteristics of the fractal signals, and by means of discrete wavelet transformation (DWT), multi-scale decomposition is carried out so as to make them become similar stationary signals and estimate them with the usual wiener filtering and Kalman filtering method, Then multi-scale reconstruction is carried out with DWT in order to estimate the primary signals polluted by noises. This paper stresses the algorithm design of the DWT filtering process, and the computing complexity is also considered.

Key words　fractal signal, discrete wavelet transform, Fast Fourier transform, filter

通常接收信号是由输入信号和传输信道的冲击响应的卷积与加性噪声之和构成，即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau+w(t) \tag{1}$$

其中 $y(t)$，$u(t)$ 分别为接收信号与输入信号，$c(t)$ 为传输信道的冲击响应，$w(t)$ 为加性噪声。信号恢复系统通过消除传输信道的影响和尽可能减小噪声干扰而输出输入信号估计值。对于具有自相似性和长时相关性的一类分形信号，诸如语音信号、电子设备的噪声等，直接在时域中用经典的滤波方法进行估计，效果都不理想。近年来，正交小波被用于分解与重构分形信号。在正交小波变换下，接收信号 $y(t)$ 的第 m 个尺度变换是输入信号的第 m 个尺度变换与传输信道冲击响应的卷积，再加上加性噪声的第 m 个尺度变换（见本文(3.15)式）这里，小波变换充当了一个使分形信号去除非平稳性质（如自相似性、长时相关性）的滤子[2]，从而可把对平稳信号的滤波方法用到变换后的系数序列上，再利用重构公式得出输入信号的估计值。由于小波变换过程实质上是一个滤波过程，故可将快速傅立叶变换(FFT)应用到该过程，加快信号的分解与重构速度。本文第 4 节将改进的 FFT 方法应用于分形信号的多尺度分解与重构的过程中，得到了一种快速算法，并估计了计算复杂度，与通常算法做了比较。

---

* 九五国防预研基金与国防科技大学试验技术项目资助
1997 年 9 月 24 日收稿
第一作者：罗建书，男，1956 年生，教授

1 多分辨分析概述

定义1 空间 $L^2(R)$ 中一列闭子空间 $[V_m]$，$m \in Z$（Z 为整数集）称为 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析，如果

(1) 单调性：$V_m \subset V_{m-1}$，$\forall\ m \in Z$；

(2) 逼近性：$\bigcap_{m\in Z} V_m = \{0\}$，$\bigcup_{m\in Z} V_m = L^2(R)$；

(3) 伸缩性：$u(x) \in V_m \Leftrightarrow u(2x) \in V_{m-1}$；

(4) 平移不变性：$u(x) \in V_0 \Leftrightarrow u(x-n) \in V_0, n \in Z$；

(5) 存在 Riesz 基，即存在 $g \in V_0$，使得 $\{g(x-k) \mid k \in Z\}$，构成 V_0 的 Riesz 基，即 $\forall\ u \in V_0$，存在唯一的序列 $\{\alpha_k\} \in l^2$，使得 $u(x) = \sum_{k\in Z} \alpha_k g(x-k)$；反之，$\forall\ \{\alpha_k\} \in l^2$，确定唯一的函数 $u \in V_0$，且存在正数 $A, B, A \leqslant B$，使得

$$A\|u\|^2 \leqslant \sum_{k\in Z} |\alpha_k|^2 \leqslant B\|u\|^2$$

设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别为由多分辨分析 $\{V_m\}$ 构造的尺度函数与小波函数[3]，

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{(\sum_{k\in Z} |\bar{g}(\omega + 2k\pi)|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{g}(w)\} \tag{2}$$

其中 $g(x)$ 为 V_0 的 Riesz 基，$\hat{g}(w)$ 与 $\check{g}(x)$ 分别表 g 的傅立叶变换和反变换。令

$$\varphi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}x - n) \tag{3}$$

设 W_m 是 V_m 在 V_{m-1} 上的正交补，即 $V_{m-1} = V_m \oplus W_m$，则 $L^2(R) = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} W_m$. 定义

$$h(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{1,0}(t)\varphi(t-n)\mathrm{d}t \tag{4}$$

则 $\{h(n)\}$ 为离散小波变换(DWT)过程中共轭滤波器 H 的冲击响应[3]，而

$$g(n) = (-1)^{n-1}h(1-n) \tag{5}$$

为 DWT 过程中转向滤波器 G 的冲击响应，函数

$$\psi(x) = \sum_{n\in Z} g(n)\varphi_{1,n}(x) \in V_0 \tag{6}$$

为所需的小波函数。由 $\{\varphi_{-1,n}(x) \mid n \in Z\}$ 的规范正交性知 $\{\psi(x-n) \mid n \in Z\}$ 是 W_0 的规范正交基，进一步可知 $\{\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}x - n) \mid n \in Z\}$ 是 W_m 的规范正交基，于是，$\{\psi_{mn}(x) \mid m \in Z, n \in Z\}$ 就构成了 $L^2(R)$ 的规范正交基。

2 分形信号的多尺度分解与重构

对于连续时间信号系统(1)，要从接收信号 $y(t)$ 估计出输入信号 $u(t)$. 设 $y_m(t)$ 是 $y(t)$ 在闭子空间 V_m 上的投影，则

$$y_m(t) = \sum_{n\in Z} [A_m y]_n \varphi_{m,n}(t) \tag{7}$$

其中逼近系数 $[A_m y]_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi_{m,n}(t)\mathrm{d}t$. 由于 $V_{m-1} = V_m \oplus W_m$，所以

$$y_{m-1}(t) = y_m(t) + \sum_{n\in Z} [D_m y]_n \psi_{m,n}(t) \tag{8}$$

其中细节系数

$$[D_m y]_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\psi_{m,n}(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

对(8)式进行正交化处理，得

$$[A_m y]_n = \sum_{k\in Z} [A_{m-1}y]_k h(k-2n) \tag{10}$$

$$[D_m y]_n = \sum_{k\in Z} [A_{m-1}y]_k g(k-2n) \tag{11}$$

$$[A_{m-1}y]_n = \sum_{k\in Z}[A_m y]_k h(n-2k) + \sum_{k\in Z}[D_m y]_k g(n-2k) \tag{12}$$

记 $\bar{h}(n) = h(-n)$, $\bar{g}(n) = g(-n)$，则(10)与(11)式成为

$$[A_m y]_n = \sum_{k\in Z}[A_{m-1}y]_k \bar{h}(2n-k) \tag{13}$$

$$[D_m y]_n = \sum_{k\in Z}[A_{m-1}y]_k \bar{g}(2n-k) \tag{14}$$

因物理仪器的分辨率有限,故可设 $y(t)\in V_0$，即

$$y(t) = \sum_{n\in Z}[A_0 y]_n \varphi_{0,n}(t) \tag{15}$$

由(7)和(8)式,

$$y(t) = \sum_{n\in Z}[A_M y]_n \varphi_{M,n}(t) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n\in z}[D_m y]_n \psi_{m,n}(t) \tag{16}$$

其中 $\sum_{n\in z}[A_M y]_n \varphi_{M,n}(t) = y_M(t)$ 是频率低于 2^{-M} 的部分,只要 M 充分大,则可使 $y(t)$ 在 V_M 上的部分 $y_M(t)$ 的能量足够小,不至于对信号分析产生明显影响,从而

$$y(t) \approx \sum_{m=1}^{M}\sum_{n\in Z}[D_m y]_n \psi_{m,n}(t) \tag{17}$$

序列 $\{[D_m y]_n\}$ 是近似平稳序列[5]。令 $[\tilde{D}_m y]_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+n)\psi_{m,0}(t)\mathrm{d}t$,则$[\tilde{D}]_m y]_{2^m\cdot n} = [D_m y]_n$.

设 $\{y(n)\}$ 是 $y(t)$ 的离散化时间序列,则

$$y(n) = \sum_{k\in Z}c(k)u(n-k) + w(n) \tag{18}$$

前已设 $y(t)\in V_0$,故可设[7]$[A_0 y]_n = y(n)$, $u(n) = [A_0 u]_n$, $w(n) = [A_0 w]_n$,(18) 式为

$$[A_0 y]_n = \sum_{k\in z}c(k)[A_0 u]_{n-k} + [A_0 w]_n \tag{19}$$

由(13)式知,对 $m = 1,2,\cdots$,

$$[A_m y]_n = \sum_{k_m\in Z}\bar{h}(2n-k_m)\sum_{k_{m-1}\in Z}\bar{h}(2k_m-k_{m-1})\cdots\sum_{k_1\in Z}\bar{h}(2k_2-k_1)[A_0 y]_{k_1} \tag{20}$$

类似地有

$$[D_m y]_n = \sum_{k_m\in Z}\bar{g}(2n-k_m)\sum_{k_{m-1}\in Z}\bar{h}(2k_m-k_{m-1})\cdots\sum_{k_1\in Z}\bar{h}(2k_2-k_1)[A_0 y]k_1 \tag{21}$$

引入算子 $T_l y(t) = y(t-l)$，则有

$$[D_m T_{2^m l} y]_n = \int_{-\infty}^{\infty} y(t-2^m l)\psi_{m,n}(t)\mathrm{d}t = [D_m y]_{n-l} \tag{22}$$

由上式及 $[\tilde{D}_m y]_n$ 的定义有

$$[\tilde{D}_m y]_n = \sum_{k_m\in z}\bar{g}(-2k_m)\sum_{k_{m-1}\in Z}h(2k_m-k_{m-1})\cdots\sum_{k_1\in Z}h(2k_2-k_1)[A_0 y]_{k_1+n}$$

将(19)式作一时间平移 k_1,有

$$[A_0 y]_{n+k_1} = \sum_{k\in Z}c(k)[A_0 u]_{n+k_1-k} + [A_0 w]_{n+k_1}$$

$$[\tilde{D}_m y]_n = \sum_{k\in Z}c(k)[\tilde{D}_m u]_{n-k} + [\tilde{D}_m w]_n, \tag{23}$$

类似地可得

$$[\tilde{A}_M y]_n = \sum_{k\in Z}c(k)[\tilde{A}_M u]_n + [A_M w]_n \tag{24}$$

由 u 的小波分解与重构公式及(11)式,对 m=1,2,…,M,有

$$[A_{m-1}u]_n = \sum_{k\in Z}[A_m u]_k h(n-2k) + \sum_{k\in Z}[D_m u]_k g(n-2k) \tag{25}$$

综上所述,我们得出(18)式中信号 $\{u(n)\}$ 的恢复算法的框架如下:

(1) $[A_0 y]_n = y(n), n\in Z$;

(2)由(21)和(22)式递推地算出 $[\tilde{A}_M y]_n, [\tilde{D}_j y]_n, n \in Z, j = 1,2,\cdots,M$；

(3)由(23)式，利用 Wiener 滤波[5]或 Kalman 滤波方法估计出 $[\hat{\tilde{D}}_M u]_n, n \in Z, j = 1,2,\cdots,M$ 及由(24)式得出估计 $[\hat{\tilde{A}}_M u]_n, n \in Z$；

(4)利用 $[\hat{D}_j u]_l = [\hat{\tilde{D}}_j u]_{2^j l}(j = 1,2,\cdots,M)$ 与 $[\hat{A}_M u]_l = [\hat{\tilde{A}}_M u]_{2^M l}, l \in Z$ 得出 $[\hat{D}_j u]_l, [\hat{A}_M u]_l, j = 1,2,\cdots,M, l \in Z$；

(5)由 $[\hat{A}_j u]_n = \sum_{k\in Z}[\hat{A}_{j+1}u]_k h(n-2k) + \sum_{k\in Z}[\hat{D}_{j+1}u]_k g(n-2k), j = 1,2,\cdots,M-1$ 得出 $[\hat{A}_0 u]_n$，$n \in Z$.

(6)$\hat{u}(n) = [\hat{A}_0 u]_n, n \in Z$.

3 DWT 算法的实现

从前一节知，估计(1)式的输入信号 $u(t)$ 或(3.9)中 $\{u(n)\}$，主要的计算是信号的多尺度分解与重构。下面，我们基于改进的 FFT(快速傅立叶变换)，提出一种离散小波变换(DWT)的算法，并给出了基于改进的 FFT 的 DWT 算法与直接实现 DWT 算法的比较。

设 $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ 为实信号，则对 $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ 的离散傅立叶变换(DFT)为

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}, \text{其中 } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{26}$$

将(26)在频域上进行分解，

$$X_{2k} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x_n + x_{n+\frac{N}{2}})W_{N/2}^{nk} \tag{27}$$

$$X_{4k+1} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\{[(x_n - x_{n+\frac{N}{2}}) - j(x_{n+\frac{N}{4}} - x_{n+3\cdot\frac{N}{4}})]W_N^n W_{N/4}^{nk} \tag{28}$$

$$X_{4k+3} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\{[(x_n - x_{n+\frac{N}{2}}) + j(x_{n+\frac{N}{4}} - x_{n+3\cdot\frac{N}{4}})]W_N^{3n} W_{N/4}^{nk} \tag{29}$$

通过上面的分解，将(26)形式的长度为 N 的 DFT 变成了一个长度为 $N/2$ 的 DFT 和两个长度为 $N/4$ 的 DFT，但在每个长度为 $N/4$ 的 DFT 中需增加关于 W_N^n 和 W_N^{3n} 的复乘法，而 $n = 0$ 不需复乘，$n = N/8$ 时，$W_N^n = \frac{2}{2}(1 + j)$ 与其它复数相乘只需2次实乘和2次实加，而一般的复乘需3次实乘和3次实加。这样，在(28)和(29)式中，需增加 $2(\frac{N}{4} - 2)$ 次一般复乘和2次关于 $W_N^{N/8}$ 的复乘。我们将(27)至(29)式所表示的 FFT 称为改进的 FFT.

令 M_n^c, A_n^c 分别代表 2^n 个复信号的改进 FFT 所需的实乘法和实加法次数。由上可知，$M_n^c = M_{n-1}^c + 2M_{n-2}^c + 3(2^{n-1} - 4) + 2\cdot 2$，由 $M_1^c = M_2^c = 0$ 得

$$M_n^c = 2^n(n-3) + 4 \tag{30}$$

从(27)～(29)分解式可知，数据的重组过程及后来的 FFT，每个阶段产生的每个新点都需一次复加法，在改进 FFT 过程中共有几个阶段，故需实加 $n\cdot 2\cdot 2^n$ 次。另外在进行复乘时还要进行实加，因为复乘(一般的与关于 W_N^n)所需实乘与实加数相等，故有

$$A_n^c = n\cdot 2^{n+1} + M_n^c = 3\cdot 2^n(n-1) + 4 \tag{31}$$

对于实信号 $\{x_n\}$，由于 $(W_N^k)^* = W_N^{N-k}$($*$ 表共轭)，$X_{4k+3} = X_{N-(4k_0+1)} = X_{4k_0-1}^*$(对某 k_0)，故 $\{X_{4k+1}\}$ 不必计算。

在实信号情况下，(26)变成了一个长度为 2^{n-1} 的实序列 DFT 和一个长度为 2^{n-2} 的复序列 DFT，如前所论，需增加 $2^{n-2}\cdot 2$ 次一般复乘法和1次关于 $W_N^{N/8}$ 的复乘法，令 M_n, A_n^r 分别代表 2^n 个实信号改进 FFT 算法所需的实乘法和加法数，则 $M_n^r = M_{n-1}^r + M_{n-2}^c + 3(2^{n-2} - 2) + 2$，由 $M_2^r = 0$ 得

$$M_n^r = 2^{n-1}(n-3)+2 \tag{32}$$

另外,数据重组时附加的加法数为 $2^{n-1}+2.2^{n-2}=2^n$,故 $A_n^r = A_{n-1}^r + A_{n-2}^c + 2^n + 3(2^{n-2}-2)+2$. 由 $A_1^r = 2$ 有

$$A_n^r = 2^{n-1}(3n-5)+4 \tag{33}$$

对每个输入和输出的数据处理过程中所需的实乘与实加法,称之为计算复杂度。

在实际的信号系统中,滤波器的冲击响应只有有限个不为零。由(5)式知,G 和 H 冲击响应的非零值个数相同。不妨设滤波器的冲击响应非零值有 L 个。将滤波器冲击响应按下标奇偶分成两列

$$h_1(n)=\bar{h}(2n),h_2(n)=\bar{h}(2n-1)$$

$$[A_m y]_n^{(1)} = [A_m y]_{2n},[A_m y]_n^{(2)} = [A_m y]_{2n-1}$$

$$[A_m y]_n = \sum_{k\in Z} h_1(n-k)[A_{m-1}y]_k^{(1)} + \sum_{k\in Z} h_2(n-k)[A_{m-1}y]_k^{(2)} \tag{34}$$

滤波器 G,H 按冲击响应的下标奇偶性分别成为两个滤波器,输入数据也按下标奇偶性分开,分别进入相应的滤波器进行滤波。

经上述分解,两个滤波器化为4个长度为 $L/2$ 的滤波器。若由 G,H 直接计算,则计算复杂度为 L 次实乘法和 $L-1$ 次实加法。

应用改进 FFT 于 DWT,将卷积化为傅立叶变换之积,再求逆变换。因进行 FT 时只能分段对输入数据进行处理,故不防设每次输入数据长度为 B,考虑到 FT 的边缘效应与重迭效应,故需对输入数据作补零处理。为此,对每个数据段进行 FT 的 N 值,需满足 $N \geqslant \frac{B}{2}+\frac{L}{2}-1, N=2^\alpha$,$\alpha$ 为正整数.

输入数据作如下处理,

$$x_n^0 = \begin{cases} x_n, 0 \leqslant n \leqslant B-1. \\ 0, B \leqslant n \leqslant N \end{cases} \tag{35}$$

由(34)式,数据段长度 B 可近似为 $B=2N-(L-2)$。

基于改进的 FFT 的 DWT 算法过程为:将长度为 B 的输入数据段按奇偶子序做长度为 N 的改进 FFT,再与4个滤波器的 DFT 作积,再按两个滤波器的等效方式作和,得到该尺度下的逼近系数和细节系数的 DFT,再进行反傅立叶变换(IFFT)即可完成滤波过程。

四个滤波过程需 $4N$ 次复乘,接下来四组数据做和需 $2N$ 次复加法,还有两个长度为 N 的 IFFT 计算,故对长度为 B 的数据段的计算复杂度为2FFT$_N$+ $4N$ 复乘法 + $2N$ 复加法+2IFFT$_N$,即

$$\frac{2^{n+1}(n+3)+8}{2^{n+1}-(L-2)} \text{ 次实乘法}, \frac{3\cdot 2^{n+1}(n+1)+16}{2^{n+1}-(L-2)} \text{ 次实加法} \tag{36}$$

总的计算复杂度

$$c(N) = \frac{N(4\log_2 N+6)+12}{N-(L/2-1)} \tag{37}$$

对 $c(N)$ 求极小值得

$$c(N_0) \approx (L/2-1)(\ln N_0 + 1 + \frac{3}{2}l_n 2) + 3\ln 2 \tag{38}$$

L 较大时,N_0 可近似满足

$$\ln N_0 = \ln L + O(\ln\ln L) \tag{39}$$

其中 $O(\ln \ln L)$ 为当 $L \to \infty$ 时的有界量,故

$$c(N_0) \approx 4\log_2 L \tag{40}$$

这与直接由 G,H 计算的计算复杂度(L 次实乘与 L—1 次实加法) 相比,改进了近 $L/2\log_2 L$.

参考文献

1 Pierre Duhamel. Implementation of Splite—Radix FFT Algorithms for complex, Real, and Real symmetric Data, IEEE Trans. on Acous, 1986,34(2)

2 薛东辉等. 分数布朗运动的功率谱分析. 华中理工大学学报. 1996,24(8)

3 刘贵忠，邸双亮. 小波分析及其应用. 西安：西安电子科技大学出版社，1993

4 侯朝焕等. 实用FFT信号处理技术. 北京：海洋出版社，1990

5 Bor—Sen Chen, Chin—wei Lin, Multiscale Wiener filter for restoration of fractal signals, IEEE Trans. on Imformation Theory, 1994,42(11):2972

6 Rioul O. Duhamel P. Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transform. IEEE Trans. on Imform., 1992,38(2):569

7 罗建书，李中升，黄建华. 分形信号的小波分解与滤波. 湖南数学年刊，1997,10(2)