国 防 科 技 大 学 学 报
第 20 卷 第 1 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 20 No. 1 1998

一类折扣型投资模型的最优停止*

王石　李兵

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　本文对一类折扣型投资模型进行研究，给出了一个明确的停止规则。

关键词　最优停时，模型

分类号　O224

Optimul Stopping Rule on Discounted Investment Model

Wang Shi　Li Bing

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics. NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　The paper diseusses the problem of discounted model, and gives anapparent stopping rule.

Key words　optimal stoppiny time, model

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$z_1,\varepsilon_1,z_2\varepsilon_2,\cdots$是独立的随机变量列。诸$z_i$服从相同的分布，分布函数为$F(x)$. 诸$\varepsilon_i$服从一个贝努里分布：

$$p(\varepsilon_i=1)=p=1-p(\varepsilon_i=0)\quad i\geqslant 1,\quad 0<p<1$$

令

$$T_0\equiv z(z\text{ 为常数})$$

$$T_n=\varepsilon_n(T_{n-1}+z_n)\quad(n\geqslant 1)$$

$$x_n=\alpha^n T_n\quad(0<\alpha<1)$$

$$\mathscr{F}=(\Omega,\varphi),\mathscr{F}_n=\sigma(z_1,\varepsilon_1,z_2,\varepsilon_2,\cdots,z_n,\varepsilon_n)\quad(n\geqslant 1).$$

$$\mathscr{F}_0=V_{n\geqslant 1}\mathscr{F}_n.\triangleq\sigma(U_{n=1}^{+\infty}\mathscr{F}_n)$$

我们来研究$(x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$的最优停止问题。

此问题可看作一经济系统的最优停止问题，$(x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$用来刻画一折扣型投资模型。$z_i$表示在第$i$个周期的“收入”，“$\varepsilon_i=1$”表示第$i$个周期胜利通过。只要胜利通过，收入便可积累，一遇失败则积累化为零。“$T_0\equiv z$”表示系统开始的资金为z. T_n表示在第n个周期的“毛收入”，α表示每一周期系统损耗程度，x_n表示在第n个周期系统的纯收入。例如股票投资便属于这一类型，问题是如何选择明智的停止时刻，使得纯收入水平达到最大，这个问题的费用型是文[2]研究过的。

引理 1　若$E|z|<+\infty$，则$E\sup\limits_{n\geqslant 0}x_n<+\infty$.

证明

$$E\sup_{n\geqslant 0}x_n\leqslant z+E\sup_{n\geqslant 1}\alpha^n T_n\leqslant z+E\sup_{n\geqslant 1}\alpha^n\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

$$\leqslant z+E\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

$$=z+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sum_{k=1}^{n}E|z_k|=z+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n nE|z_1|$$

* 国家自然科学基金项目
1997 年 4 月 17 日收稿
第一作者：王石，男，1973 年生，硕士生

$$= z + E|z_1|\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n < +\infty$$

如果令 $x_\infty=\lim\limits_n x_n$ 则$(x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$满足文[1]中的 A_1、A_2条件，由文[1]知$(x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$的最优停时存在。

引理2 $(T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是一维空间$(\mathscr{R},\mathscr{B})$中的马氏链，其转移函数是

$$p(x,B) = p\int_{-\infty}^{+\infty} I_B(x+u)\mathrm{d}F(u) + (1-p)I_B(0) \tag{1}$$

证明 设 f 为 Borel 可测函数由 $\sigma(\varepsilon_{n+1},z_{\tau+1})$与 $\mathscr{F}_n$ 独立，有

$$\begin{aligned} & E[f(T_{n+1})|\mathscr{F}_n] \\ = & E[E(\varepsilon_{n+1}(T_n+z_{n+1})|\mathscr{F}_n] \\ = & E[f(\varepsilon_{n+1}(x+z_{n+1})]|_{x=T_n} = E[f(\varepsilon_{n+1}=1)f(x+z_{n+1})]|_{x=T_n} + E[I_{[\varepsilon_{m+1=0}]}f(0)] \\ = & p\int_{-\infty}^{+\infty} f(T_n+u)\mathrm{d}F(u) + (1-p)f(0) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & E\{E(f(T_n)|\mathscr{F}_n)|\sigma(T_n)\} \\ = & E[f(T_{n+1})|\sigma(T_n)] = p\int_{-\infty}^{+\infty} f(T_n+u)\mathrm{d}F(u) + (1-p)f(0) \end{aligned}$$

其中式(2)表示 $g(x)\triangleq E[f(\varepsilon_{n+1}(x+z_{\tau+1})]$在 T_n 的值。取 $f=I_B$ 知$(T_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是齐次马氏链，它的转移函数具有式(1)的形式。

引理3 令 $g(x)\equiv x, Qg(x) = g(x)V\alpha Tg(x), \triangleq g(x)V(\alpha\int_{-\infty}^{\infty} p(x,dy)g(y)) - p(x,B)$ 定义为(1) 式，$V(x) = \sup\{Exe,\tau$ 为停时，$x_0\equiv x\}$ 则有

(1)$V(x) = \lim\limits_n Q^n g(x) \quad [Q^n g(x)\triangleq Q(Q^{(n+1)}g(x))]$

$$\begin{aligned} (2)V(x) &= \max\{x,\alpha TV(x)\} \\ &= \max\{x,\ p\int_{-\infty}^{+\infty} V(x+u)dF(u) + \alpha(1-p)V(0)\} \end{aligned} \tag{3}$$

证明 由文[1]3.11节定理3.42及引理2可得。

引理4 设 $p(z_1\geqslant 0)=1, E|z_1|<+\infty$则

$\{x:V(x)=x\}=[s,+\infty)$其中 $s=\dfrac{1-p}{1-\alpha p}V(0)+\dfrac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$

证明 $g(x)\equiv x. \quad Tg(x) = p\int_{-\infty}^{+\infty}(x+11)\mathrm{d}F(u) = px + pEz_1$

$$Qg(x)=\max\{x,\alpha px+\alpha pEz_1\}$$

令 $$u_n=Q^{n-1}g(0)\frac{1-p}{1-\alpha p}+\frac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$$

利用数学归纳法不难证明

$$Q^n g(x) = \begin{cases} \max\{x,\alpha px + \alpha pEz_1 + (1-\alpha p)^{-1}Q^{n-1}g(x)\} & x\geqslant u_{n-1} \\ x & x\geqslant u_n \end{cases}$$

易知 $u_n\nearrow\dfrac{1-\alpha p}{1-\alpha p}V(0)+\dfrac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1=s$. 再由引理3可知 $x\geqslant s$ 时

$$Q^n g(x) = x,\ V(x) = \lim_n Q^n g(x) = x$$

$x<s$ 时

$$\exists\ n_0 \text{ 使 } x\in[u_{n_0-1},u_{n_0}] \quad x<u_{n_0}$$

经计算 $V(x)\geqslant Q^{n_0}g(x)>x$ 从而$\{x:V(x)=x\}=[s,+\infty)$

引理5 若 $E|z_1|<+\infty$ $p(z_1\geqslant 0)=1. h(x)\triangleq V(1-r+s)+x-s$ 则有

$$h(x)=\begin{cases}\alpha p\int_0^{+\infty} n(x-u)\mathrm{d}F(u)+(1-\alpha p)x+c & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{4}$$

其中，$c=(\alpha-1)(1-\alpha p)s+\alpha p(1-\alpha)Ez_1$，$s$ 为方程 $h(s)=A^{-1}(s-B)$ 的解，其中 $A=\frac{1-p}{1-\alpha p}$ $B=\frac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$

证明 易知

$$V(x)=\begin{cases}\alpha p\int_0^{+\infty}V(x+u)\mathrm{d}F(u)+\alpha(1-p)V(0) & x<0\\ x & x\geqslant s\end{cases}$$

从而有 $x\leqslant 0$时，$h(x)=0$；$x>0$时

$$\begin{aligned}h(x)&=V(-x+s)+x-s\\&=\alpha p\int_0^{+\infty}V(-x+s+u)\mathrm{d}F(u)+\alpha(1-p)v(0)+x-s\\&=\alpha p\int_0^{+\infty}[V(-x+s+u)+(x-u)-s]\mathrm{d}F(u)\\&\quad-\alpha p(x-Ez_1-s)+\alpha(1-p)V(0)+x-s\\&=\alpha p\int_0^{\infty}h(x-u)\mathrm{d}F(u)+(1-\alpha p)x+c.\end{aligned}$$

定理1 设 $p(z_1\geqslant 0)=1, E|z_1|<+\infty$. 则$(x_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$的最优规则可表为 $\sigma=\inf\{n\geqslant 0. T_n\geqslant s\}$ 其中 $s=\frac{1-p}{1-\alpha p}V(0)+\frac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$. 满足方程 $h(s)=A^{-1}(s-B)$. $A=\frac{1-p}{1-\alpha p}$ $B=\frac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$，$h(x)$适合方程(4).

证明 利用文[1]定理及一般停时规则可知：$\sigma=\inf\{n\geqslant 0. \alpha^n V(T_n)=\sigma^n T_n\}$为最优停时，再由引理4知 $\sigma=\inf\{n\geqslant 0. T_n\geqslant s\}$.

因此，只要求得 s，最优停时便能确定。首先利用积分方程(4)求得 $h(x)$的表达式，再根据 $h(s)=A^{-1}(s-B)$求得 s. 一般只能得到 s 满足一代数方程，只能用数值法把 s 求出。

(Ⅰ)离散情形

设 z_1只取为非负整数值。$p_j=p(z_1=j)$. $(j\geqq 0)\sum_{j=1}^{\infty}p_j=1$. 由(4)式知

$$h(i+u)=\sum_{j=0}^{i}\alpha p p_j h(i+u-j)+\alpha(1-p)(i+u)+c\quad i=1,2\cdots$$

$$h(u)=\frac{1}{1-\alpha p p_0}[\alpha(1-p)u+c]$$

为计算 $h(i+u)$的递推公式，引进母函数

$$\psi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j z^j\quad \varphi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i+u)z^i.$$

推知

$$\varphi(z)=\frac{\alpha(1-p)(1+u)+c-\alpha(1-p)z}{[1-\alpha p\psi(z)](1-z)^2}$$

例1 z_1服从几何分布，此时 $p_0=0$. $p_j=a^{j-1}b$. $0<a<1, a+b=1$

易知
$$\psi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j z^j=\frac{bz}{1-az}$$

从而
$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{(1-az)[\alpha(1-p)(1+u)+c-\alpha(1-p)z]}{[1-(\alpha pb+a)z](1-z)^2}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}[A(\alpha pb+a)^i-c-(c+D)i]z^i\end{aligned}$$

其中

$$A=\frac{a\alpha(1-p)-[a\alpha(1-p)(2+u)+ac](a+dpb)+[\alpha(1-p)(1+u)+c](a+\alpha pb)^2}{[1-(a+\alpha pb)]^2}$$

$\triangleq c_1u + D_1s + E_1$

$$C = \frac{[2 - a\alpha(1-p) - \alpha(1-p)(1+u) - c](a+\alpha pb) + 2\alpha(1-p)(1+u) + 2c - a\alpha(1-p)(2+u) - ac}{[1-(\alpha a+\alpha pb)]^2}$$

$\triangleq c_2u + D_2s + E_2$

$$C + D = \frac{a\alpha(1-p) - \alpha(1-p)(2+u) - \alpha(1-p)(1+u) + c}{[1-(a+\alpha pb)]^2} \triangleq C_3u + D_3s + E_3$$

其中 $C_i, D_i, E_i (i=1,2,3)$ 为仅与 α, p, b, a 有关的常数。

令
$$k = \alpha pb + a$$
则
$$h(i+u) = Ak^i - c - (c+D)i$$
$$= (C_1u + D_1s + E_1)K^i - [C_2u + D_2s + E_2) - (C_3u + D_3s + E_3)i$$
令
$$x = i + u, [x] = i.\ u = x - [x]$$
则有
$$h(x) = [c_1(x - [x]) + D_1s + E_1]K^{[x]} - [c_2(x - [x]) + D_2s + E_2] - (c_3(x - [x]) + D_3s + E_3][x] \tag{5}$$

这样 s 满足方程

$$[c_1(s - [s]) + D_1s + E_1]K^{[s]} - [c_2(s - [s]) + D_2s + E_2] - (c_3(s - [s]) + D_3s + E_3)[s] = A^{-1}(s - B)$$

其中 $C_i, D_iE_i (i=1,23)$ 为仅与 α, p, ba,有关,

$$A = \frac{1-p}{1-\alpha p} \quad B = \frac{\alpha p}{1-\alpha p}Ez_1$$

(Ⅱ)连续情形

例2 设 $F(x)$ 为指数分布函数即

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ x \geqslant 0.\ F(x) = 0, x < 0, (\lambda > 0)$$

令
$$\varphi(x) = h(x)e^{-\varepsilon x}, K(x) = \alpha pF'(x)e^{-\varepsilon x}$$

$f(x) = [\alpha(1-p)x + c]e^{-\varepsilon x}\ x \geqslant 0\ f(x) = 0.\ x < 0$. 代入(4)得

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} K(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u + f(x)$$

利用文[4]中的 Winer-Hopf 积分方程之解法可得

$$\varphi(x) = [\frac{\alpha^2p(1-p)\lambda}{H}(Hx - 1e^{-Hx}) + \frac{c\alpha p\lambda}{H}(1 - e^{-Hx})]e^{-\varepsilon x}.$$

其中
$$H = \lambda(1 - \alpha p)$$

因此
$$h(x) = \frac{\alpha^2p(1-p)\lambda}{H}(Hx - 1 + e^{-Hx}) + \frac{c\alpha p\lambda}{H}(1 - e^{-Hx})$$

代入 $h(s) = A^{-1}(s - B)$,经过化简得,s 应满足下列方程

$(\alpha_1s + \alpha_2)e^{-Hs} + \beta_1s + \beta_2 = 0$ $\alpha_i, \beta_i (i=1,2)$ 为仅与 α, p, λ. 有关的常数。$H = \lambda(1 - \alpha p)$。

参考文献

1 金治明,最优停止理论及应用.长沙:国防科技大学出版社,1995

2 陈家航,李向科.一类最优停止问题的解.应用概率统计,1986,1(2)

3 陈家航.序贯估计.北京大学出版社,1995

4 路可见,钟寿国.积分方程论.北京:高等教育出版社