

用多重网格 TVD 方法求解三维高超音速粘性流场*

李桦 王承尧 王磊

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 本文采用时间相关法求解了三维 N-S 方程。在计算中,对于压力和对流项采用 Roe 的通量差分分裂技术和 Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式,对于粘性项,采用了中心差分格式。通过数值模拟得到了钝头双锥体高超音速层流流场在不同攻角下的数值解。计算的重点放在壁面热流率的预测。在攻角为 4° 和 12° 的状态下, Stanton 数的计算值与实验值进行了比较,二者吻合较好。为了加快收敛速率,计算时采用了多重网格方法。

关键词 三维高超音速粘性流, TVD 格式, 通量分裂, 多重网格

分类号 V211.4

Multigrid and TVD Scheme for Three Dimension Hypersonic Viscous Flowfield

Li Hua Wang Chengyao Wang Lei

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the time-dependent numerical method is used to solve the three dimensional Navier-Stokes equation. In the numerical procedure, Roe's flux difference splitting technique and Chakravarthy-Osher TVD scheme are used for the pressure and convective terms. Numerical solution of the Hypersonic laminar flow over a blunt biconic with 4° and 12° attack angle is obtained. The emphasis is placed on the predictions of the heat transfer rate on the wall. The numerical results of Stanton number are compared with the experimental data. And the multigrid method is also used to accelerate the convergence.

Key words 3D hyperonic viscous flow, TVD scheme, Multigrid, Flux difference splitting technique

高超音速粘性绕流流场包含有强激波、膨胀波、亚音速区及分离区,是一个十分复杂的三维流场。要用数值方法模拟这样的流场,所采用的控制方程必须是 Navier-Stokes 方程(简称 NS 方程),所采用的数值格式应为具有高分辨率的差分格式。

自从 Harten 引入 TVD 格式概念以来, TVD 格式已成为计算流体力学领域中广泛采用的差分格式之一,它在模拟有强激波的可压流场中取得了显著的效果。本文采用 Roe 的通量差分分裂技术与 Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式求解了三维 NS 方程,得到了钝头双锥体在不同攻角下的高超音速层流流场的数值解,并与实验进行比较。

1 控制方程和有限体积方法

对于一个控制体 V , N-S 方程的积分形式可以写成:

* 国家自然科学基金资助
1997年1月13日收稿
第一作者:李桦,男,1962年生,副教授

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S F^i n dS = \int_S F^V n ds \quad (1)$$

其中 S 是控制体的表面积, Q 是守恒变量矢量, F^i 是无粘通量, F^V 是粘性通量, n 为面元 dS 的外法单位矢量。

在三维情况下, 所考虑的控制体为一个六面体, 此时, 方程 (1) 可整理为

$$\frac{\partial}{\partial t} (QV) + \int_S F^i n dS = \int_S F^V n ds \quad (2)$$

设控制体的中心位于 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$, 则在 $(i + \frac{1}{2})$ 界面上的通量可近似为

$$(F^i n ds)_{i+\frac{1}{2}} = F^i_{i+\frac{1}{2}} = \left\{ [F^i \xi_x + G^i \xi_y + H^i \xi_z] \frac{\xi}{J} \right\}_{i+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$(F^V n ds)_{i+\frac{1}{2}} = F^V_{i+\frac{1}{2}} = \left\{ [F^V \xi_x + G^V \xi_y + H^V \xi_z] \frac{\xi}{J} \right\}_{i+\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中, (ξ_x, ξ_y, ξ_z) 是 n 的分量, $\frac{1}{J}$ 是控制体的体积, $F_i, G_i, H_i, F_v, G_v, H_v$ 分别为直角坐标系下的无粘通量和粘性通量, 其具体表达式参见参考文献 [6]。

将控制体各个界面上净通量相加, 代入方程 (2), 则得到

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta \xi} (F^i - F^V) + \frac{\delta}{\delta \eta} (G^i - G^V) + \frac{\delta}{\delta \zeta} (H^i - H^V) = 0 \quad (5)$$

其中算子:

$$\frac{\delta}{\delta \xi} (F^i - F^V) = (F^i - F^V)_{i+\frac{1}{2}} - (F^i - F^V)_{i-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

在计算中, 为了简便和准确, 我们采用了 Roe 的近似 Riemann 解法和 Osher-Chakravathy 的 TVD 格式。

(1) Roe 的近似 Riemann 解法

以 Riemann 问题的解为基础构造的数值方法较好地模拟了信号传播规律, 所得的计算结果较准确, 但计算工作量较大。Roe 通过对交界面上物理参数, 采用特殊的平均方法, 将非线性波的相互干扰问题简化成线性波的干扰问题, 从而使问题求解得到了大大地简化。

设交界面左、右两边的物理量分别为 Q^L 和 Q^R , 采用 Roe 的平均方法得到交界面处的物理参数为:

$$Q' = \text{ROE}(Q^R, Q^L) \quad (7)$$

至于公式 (7) 的详细说明, 参见文献 [3]。

(2) Osher-Chakravathy 的 TVD 格式。

Osher-Chakravathy 的 TVD 格式的数值通量表达式为:

$$F^i_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [F(Q^R_{i+\frac{1}{2}}) + F(Q^L_{i+\frac{1}{2}}) - R_{i+\frac{1}{2}} \Pi_{i+\frac{1}{2}} L_{i+\frac{1}{2}}] \quad (8)$$

其中交界面处左、右两边的状态参数 $Q^R_{i+\frac{1}{2}}, Q^L_{i+\frac{1}{2}}$ 分别采用 TVD 格式插值得到 [4]。

2 多重网格法

多重网格方法是目前加快收敛速率常用的方法之一。在我们的计算中, 为提高收敛速度, 采用了粗、细两层网格^[6]。

3 结果与分析

用上面所描述的数值方法计算了钝头双锥体在不同攻角下的高超音速层流绕流流场。来流条件为:

$$M = 9.9; T = 49.8\text{K}; T_w = 300\text{K}; \text{Re} = 2.2 \times 10^5$$

所采用的网格体系为 $57 \times 41 \times 31$; 图 1 给出了子午面上的计算网格示意图。图 2 为 4 时流场的等压线

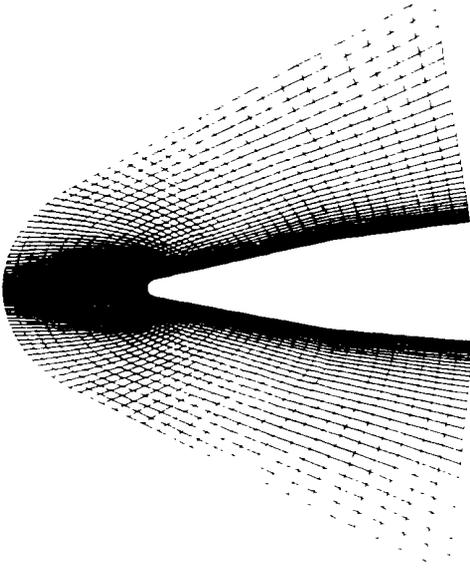


图 1 计算网格示意图

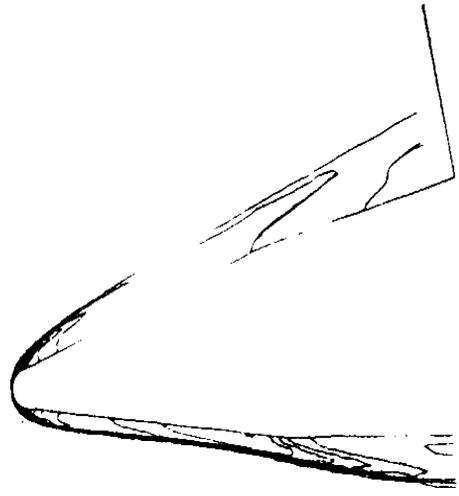


图 2 攻角 4 时等压线图

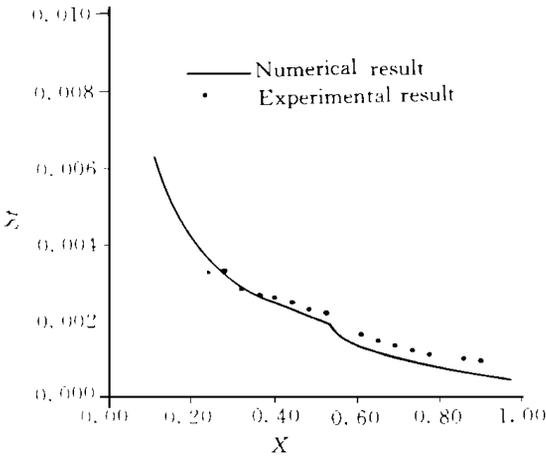


图 3 攻角 4 时 ST 数对比

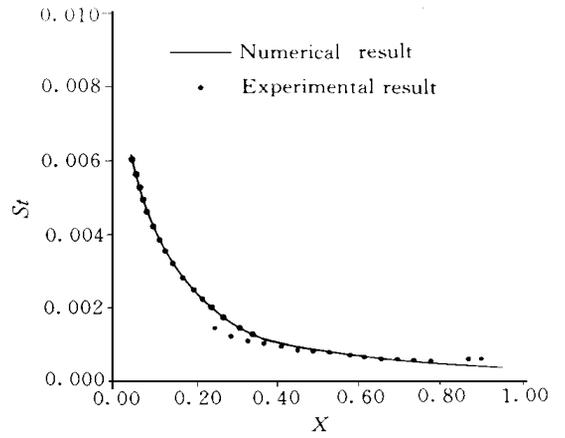


图 4 攻角 12 时 ST 数对比

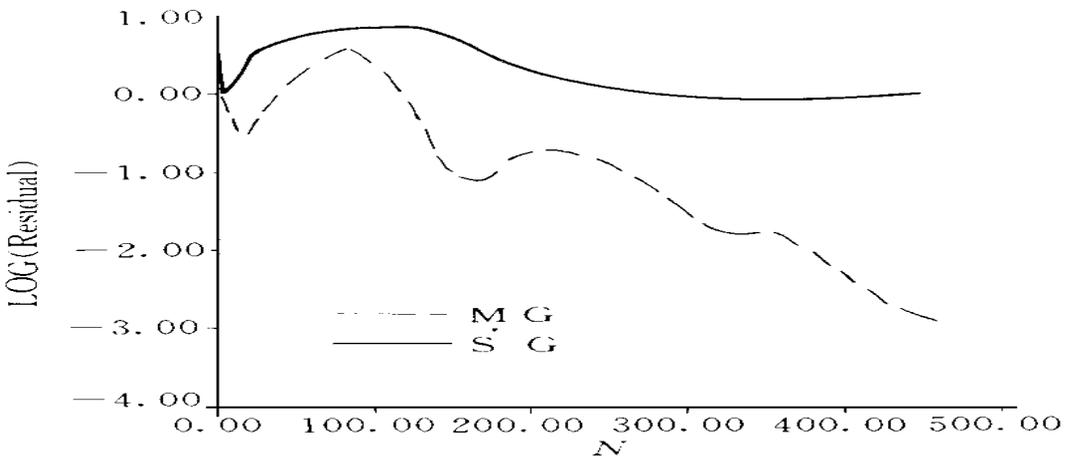


图 5 单层网格 (SG) 和多重网格 (MG) 收敛过程曲线

图。通过对流场在不同攻角下的数值模拟，我们计算了表示壁面热流率的 Stanton 数沿壁面的分布。

Stanton 数在定义如下^[2]:

$$ST = \frac{1}{(T_0 - T_w) \text{PrRe}} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (16)$$

其中 T_0 为滞止温度, n 表示垂直与壁面方向。粘性系数采用 Southland 公式进行计算。

在攻角为 4 和 12 时, 我们将 Stanton 数沿壁面分布的计算结果与实验结果^[5]进行了对比。图 3、图 4 分别给出了攻角 4 和 12 时对称面上背风面的 Stanton 数的计算结果与实验值的比较。可以看到计算结果与实验结果符合得很好。这说明我们采用的方法是可靠的。

图 5 给出了多重网格和单层网格的计算收敛历史曲线, 从图中可以看到: 采用多重网格法能够大大地提高高超音速流场数值计算的收敛速度。

参考文献

- 1 Harten A. High Resolution Schemes for Hypersonic conservation Lamss. J. Comput. Phys. 1983: 357
- 2 Wang Z. J. Numerical Simulation of 3D Hypersonic Flow Using High Resolution Schemes: [博士论文]. 1990
- 3 Roe P. L. Approximate Riemann Solver, Parameter Vector and Difference Schemes. J. Comput. Phys. 1980: 354
- 4 Chakravarthy S R. Lectures Notes for CFD. 1988
- 5 Miller C G. N85 - 12313. 1984
- 6 李桦. 三维超音速/高超音速复杂流场分区多机并行数值计算与实验验证: [博士论文], 国防科技大学, 1996