

TDOA 被动定位方法及精度分析*

杨林 周一宇 孙仲康

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

摘要 本文提出了一种利用多站 TDOA 信息对辐射源定位的非线性方程组求解方法, 该方法简洁准确, 无需作迭代运算, 计算量小。文中给出了该定位方法的精度分析, 最后给出了在具体布站条件下的受控区域内的 GDOP 分布。

关键词 无源定位, TDOA, 时差定位, 精度分析, GDOP

分类号 TN953. 7

TDOA Passive Location and Accuracy Analysis

Yanglin Zhou Yiyu Sun Zhongkang

(Institute of Electronic Engineering, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract A new exact, explicit, uniterative, and computationally efficient solution of nonlinear equation set for estimation of emitter position based on the time differences of arrival (TDOA) measured by multi-stations is proposed in this paper. The accuracy analysis of the location method is also presented. Finally performance evaluation results of emitter location by using TDOA information are illustrated by some graphs of Geometrical Dilution of Precision (GDOP) under various conditions in the specific surveillance region.

Key words Passive Location, TDOA, TDOA Location, Accuracy Analysis, GDOP

无源定位系统本身不发射电磁波, 完全是被动工作的, 因此具有隐蔽性好的优点, 对于提高系统在电子战环境下的生存能力具有重要的作用^[1]。到达时差 (TDOA) 定位又称为双曲线定位, 是通过处理三个或更多个测量站采集到的信号到达时间测量数据对辐射源进行定位的。在二维平面内, 辐射源信号到达两测量站的时间差规定了一对以两站为焦点的双曲线。如果利用三或四个站形成两条曲线, 则得到两对双曲线的两个交点, 再利用其它辅助信息去除定位模糊, 从而可以确定辐射源的位置。在三维空间中, 至少需要形成三对双曲面来产生交点^{[2][3][4]}。

本文研究了利用多站测量到的时差数据对辐射源进行被动定位的方法, 并对该方法的性能进行了分析。在多站测量到 TDOA 数据之后, 需要求解一组非线性方程组才能够得到辐射源的位置。传统的求解这个非线性方程组的方法是建立在迭代运算和线性化的基础上^[4]。该方法计算量大, 并且需要有一个辐射源位置的较精确的初始猜测, 而这在实际中并不容易。本文第二部分推导了一种利用多站 TDOA 信息对辐射源定位的非线性方程组精确求解方法, 该方法消除了已有方法中存在的迭代问题。第三部分给出了该定位方法的精度分析, 第四部分给出在具体布站及其它条件下的受控区域内辐射源定位的 GDOP 分布。

1 定位方法

探测系统由一个主站及 n 个辅站构成, 各站的空间位置为 $(x_j, y_j, z_j)^T, j=0, 1, 2, \dots, n, j=$

* 1997年5月10日收稿

第一作者: 杨林, 男, 1970年生, 博士生

0 表示主站, $j = 1, 2, \dots, n-1$ 表示辅站。目标的空间位置为 $(x, y, z)^T$, r_j 表示目标与第 j 站之间的距离, Δr_i 表示目标到第 i 站与目标到主站之间的距离差, 用方程表示为

$$\begin{cases} r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, i = 1, 2, \dots, n \\ \Delta r_i = r_i - r_0 \end{cases} \quad (1)$$

对上式整理化简得

$$(x_0 - x_i)x + (y_0 - y_i)y + (z_0 - z_i)z = k_i + r_0 \Delta r_i \quad (2)$$

其中

$$k_i = \frac{1}{2}[\Delta r_i^2 + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)], \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

由 (2) 式表示的 n 个方程构成了一个非线性方程组。为了求解这个方程组, 我们首先将 r_0 看作是一已知量, 因此可以得到如下矩阵表达式

$$AX = F \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 - x_n & y_0 - y_n & z_0 - z_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$X = [x \quad y \quad z]^T \quad (6)$$

$$F = \begin{bmatrix} k_1 + r_0 \Delta r_1 \\ \vdots \\ k_n + r_0 \Delta r_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

在选择合适站址条件下, $\text{rank}(A) = 3$, 用伪逆法解方程 (4), 可以得到

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T F \quad (8)$$

令

$$(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{3 \times n} \quad (9)$$

因此由 (8) 式可得

$$\begin{cases} \hat{x} = m_1 + n_1 r_0 \\ \hat{y} = m_2 + n_2 r_0 \\ \hat{z} = m_3 + n_3 r_0 \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} m_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} k_j \\ n_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta r_j \end{cases}, (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

将 (10) 式代入 r_0 的表达式, 得到

$$a r_0^2 + 2b r_0 + c = 0 \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} a = \sum_{i=1}^3 n_i^2 - 1 \\ b = (m_1 - x_0)n_1 + (m_2 - y_0)n_2 + (m_3 - z_0)n_3 \\ c = (m_1 - x_0)^2 + (m_2 - y_0)^2 + (m_3 - z_0)^2 \end{cases} \quad (13)$$

由方程 (12) 可以解得 r_0 的两个值 r_{01} 及 r_{02} , 因此存在定位模糊问题。若 $r_{01}r_{02} < 0$, 则取正值作为

r_0 。若 r_{01} 及 r_{02} 都为正, 当 $n=3$ 时, 则需要其它辅助测量信息, 如某站测得的方位角, 将 r_{01} 及 r_{02} 代入式 (10) 得到两个位置点, 计算这两个位置点对于该站的两个方位角, 将这两个方位角与测量得到的方位角作比较, 从而可以确定正确的 r_0 值; 当 $n>3$ 时, 可以将得到的时差数据分为两个子集, 每个子集至少包括个数满足求解条件的时差数据, 这两个子集可以含有共同的时差数据, 同时每个子集至少有一个时差数据是另一个子集所没有的。因此每个子集都可以得出两个 r_0 的解, 将两个子集求解出的 r_0 值进行最近距离匹配, 从而确定正确的 r_0 值, 消除目标的定位模糊。

2. 时差定位系统定位精度分析

对 $\Delta r_i = r_i - r_0$ 两边求微分得

$$d(\Delta r_i) = (c_{ix} - c_{0x})dx + (c_{iy} - c_{0y})dy + (c_{iz} - c_{0z})dz + (k_i - k_0), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

其中

$$c_{jx} = \frac{\partial r_j}{\partial x} = -\frac{\partial r_j}{\partial x_j} = \frac{x - x_j}{r_j}; c_{jy} = \frac{\partial r_j}{\partial y} = -\frac{\partial r_j}{\partial y_j} = \frac{y - y_j}{r_j}; c_{jz} = \frac{\partial r_j}{\partial z} = -\frac{\partial r_j}{\partial z_j} = \frac{z - z_j}{r_j} \quad (15)$$

$$k_j = c_{jx}dx_j + c_{jy}dy_j + c_{jz}dz_j \quad (16)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

令

$$C = \begin{bmatrix} c_{1x} - c_{0x} & c_{1y} - c_{0y} & c_{1z} - c_{0z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{nx} - c_{0x} & c_{ny} - c_{0y} & c_{nz} - c_{0z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{X}_s = [k_1 - k_0, k_2 - k_0, \dots, k_n - k_0]^T; d\mathbf{X} = [dx \quad dy \quad dz]^T \\ d\mathbf{Y} = [d(\Delta r_1), d(\Delta r_2), \dots, d(\Delta r_n)]^T \end{cases} \quad (18)$$

于是由 (14) 表示的 n 个误差方程写成矩阵形式为

$$d\mathbf{Y} = C d\mathbf{X} + d\mathbf{X}_s \quad (19)$$

因此用伪逆法求解目标定位误差估计值为

$$d\mathbf{X} = (C^T C)^{-1} C^T (d\mathbf{Y} - d\mathbf{X}_s) \quad (20)$$

令

$$(C^T C)^{-1} C^T = \mathbf{B} = [b_{ij}]_{3 \times n} \quad (21)$$

由于各时间差测量中都包含有主站测量到达时间的误差, 也即各时间差测量中都包含有共同的误差因素, 因此各 Δr_i 的观测误差间是相关的。设定 Δr_i 测量误差经系统修正后是零均值的, 而站址误差在每次测量中是保持不变的, 且站址误差各元素之间及各站址误差之间互不相关, 故定位误差协方差为

$$P_{d\mathbf{X}} = E[d\mathbf{X} d\mathbf{X}^T] = \mathbf{B} \{ E[d\mathbf{Y} d\mathbf{Y}^T] + E[d\mathbf{X}_s d\mathbf{X}_s^T] \} \mathbf{B}^T \quad (22)$$

式中

$$E[d\mathbf{Y} d\mathbf{Y}^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta r_1}^2 & \eta_{12} \sigma_{\Delta r_1} \sigma_{\Delta r_2} & \dots & \eta_{1n} \sigma_{\Delta r_1} \sigma_{\Delta r_n} \\ \eta_{21} \sigma_{\Delta r_1} \sigma_{\Delta r_2} & \sigma_{\Delta r_2}^2 & \dots & \eta_{2n} \sigma_{\Delta r_2} \sigma_{\Delta r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} \sigma_{\Delta r_1} \sigma_{\Delta r_n} & \eta_{n2} \sigma_{\Delta r_2} \sigma_{\Delta r_n} & \dots & \sigma_{\Delta r_n}^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中 $\sigma_{\Delta r_i}^2$ 为第 i 站与主站之间距离差测量误差的标准差, η_{ij} 为 Δr_i 与 Δr_j 间的相关系数,

$$\eta_{ij} = \frac{\text{cov}(\Delta r_i, \Delta r_j)}{\sigma_{\Delta r_i} \sigma_{\Delta r_j}} \quad (24)$$

$$E[d\mathbf{X}_s d\mathbf{X}_s^T] = \text{diag}[c_{1x}^2 \sigma_{x_0}^2 + c_{1y}^2 \sigma_{y_0}^2 + c_{1z}^2 \sigma_{z_0}^2, \dots, c_{nx}^2 \sigma_{x_0}^2 + c_{ny}^2 \sigma_{y_0}^2 + c_{nz}^2 \sigma_{z_0}^2] + (c_{0x}^2 \sigma_{x_0}^2 + c_{0y}^2 \sigma_{y_0}^2 + c_{0z}^2 \sigma_{z_0}^2) I_n \quad (25)$$

其中 l_n 为 n 阶方阵。

假设站址误差各分量的标准差是相同的, 即

$$\sigma_{x_j}^2 = \sigma_{y_j}^2 = \sigma_{z_j}^2 = \sigma_s^2 \tag{26}$$

又由于 $a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 = 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$), 故可以得到

$$E(d\mathbf{X}_s d\mathbf{X}_s^T) = \sigma_s^2 (I_n + l_n) \tag{27}$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵。

令

$$E(d\mathbf{Y} d\mathbf{Y}^T) + E(d\mathbf{X}_s d\mathbf{X}_s^T) = [\sigma_{ij}]_{n \times n} \tag{28}$$

$$\mathbf{P}_{d\hat{\mathbf{x}}} = [m_{lh}]_{3 \times 3} \tag{29}$$

其中

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_{\Delta_i}^2 + 2\sigma_s^2, & \text{if } i = j \\ \eta_{ij} \sigma_{\Delta_i} \sigma_{\Delta_j} + \sigma_s^2, & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{30}$$

$$m_{lh} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{li} b_{lj} \sigma_{ij}, \quad (l, h = 1, 2, 3) \tag{31}$$

因此可得定位误差在 x 、 y 、 z 方向上的方差分别为

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= m_{11} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{1i} b_{1j} \sigma_{ij} \\ \sigma_y^2 &= m_{22} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{2i} b_{2j} \sigma_{ij} \\ \sigma_z^2 &= m_{33} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{3i} b_{3j} \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{32}$$

定位精度用 GDOP (Geometrical Dilution of Precision) 表示

$$GDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{1i} b_{1j} + b_{2i} b_{2j} + b_{3i} b_{3j}) \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

由 (33) 式可见, 定位精度与站址误差及 TDOA 的测量误差的标准差有关, 目标与各被动探测站的几何位置关系对定位精度有较大影响。我们可以通过分析不同布站条件下 GDOP 在受控区域内的分布, 合理选择站址布局。

3. 具体布站条件下的 GDOP 分布

下面我们计算某多站无源时差定位系统在受控区域内的 GDOP 分布。该系统利用三个接收站测量到达时差实现目标的二维定位。系统站址配置见图 1, 三站间成等腰三角形, 夹角为 120° ; 主站与辅站间的距离为 $10\text{km} \sim 35\text{km}$ 。

在二维平面内的 GDOP 计算依据 (34) 式

$$GDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \tag{34}$$

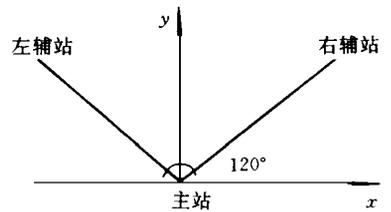


图 1

表 1

误差标准差 (ns)	三站间的夹角	主站与辅站间的距离	GDOP 图
20	120°	10km	图 4. 1
10	120°	10km	图 4. 2
10	120°	35km	图 4. 3
10	150°	35km	图 4. 4

假设各站测时差误差标准差都相等。图 2~6 给出了各种条件下 (见表 2) 的 GDOP 分布图。从图

2~5 可以看出: 时差测量精度及布站形式对于系统的定位精度都有较大影响, 时差测量精度越高则系统在受控区域的定位精度也越高; 主站与辅站间的距离增大, 定位精度也相应提高; 三站间夹角增大, 精度提高; 在主站辅站的连线上定位误差无限大, 也就是说, 发射机在这些位置无法定位并且越靠近连线定位精度越低。

4. 总结

本文推导了一种利用多站 TDOA 信息对辐射源定位的非线性方程组求解方法, 该方法不需要迭代运算。对该定位方法精度作了分析, 发现定位精度与站址误差及 TDOA 的测量误差的标准差有关, 目标与各被动探测站的几何位置关系对定位精度有较大影响。我们可以通过分析不同布站条件下 GDOP 在受控区域内的分布, 合理选择站址布局。

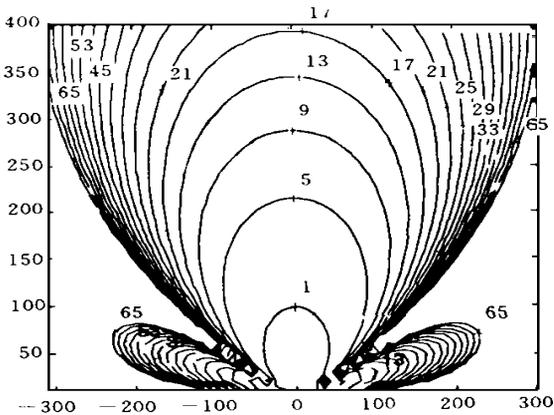


图 2

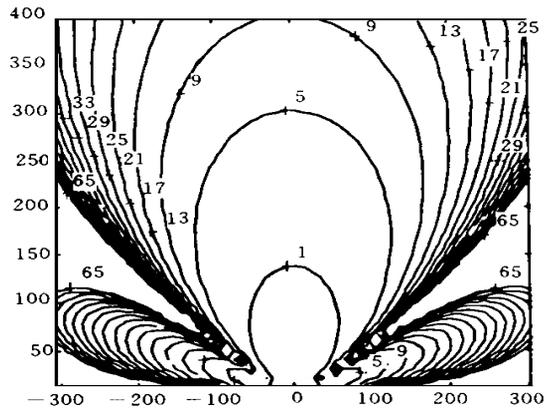


图 3

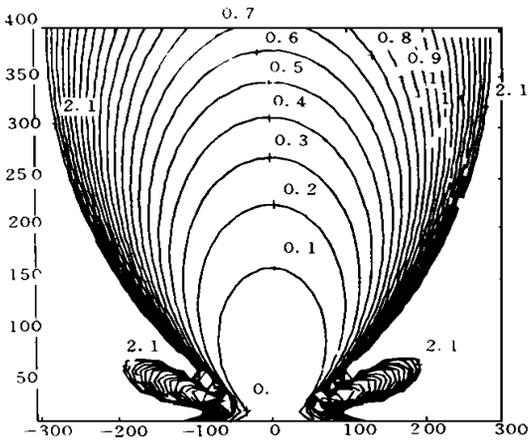


图 4

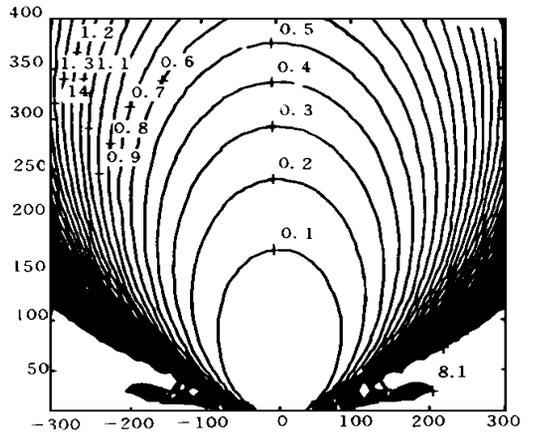


图 5

参考文献

- 1 孙仲康. 反电子对抗中的电磁隐蔽. 国防科技大学学报, 1993
- 2 孙仲康, 周一宇等. 单多基地有源无源定位技术. 北京: 国防工业出版社, 1996
- 3 孙仲康, 陈辉煌. 定位导航与制导. 北京: 国防工业出版社, 1988
- 4 Torrieri D J. Statistical Theory of Passive Location Systems. IEEE Vol AES-20, 1984: 183-198