国 防 科 技 大 学 学 报
第 20卷 第 2期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.20 No.2 1998

关于一维线性系统的逆*

张新建

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文对单输入单输出系统给出了可逆性的判断准则，建立了新的降阶逆系统的构造方法。这种新的降阶逆系统与以往的降阶逆系统相比，阶数更低了、构造更加简单，而且揭示了可观测性矩阵的秩与逆系统的阶之间的联系。最后用例子说明了这一方法。

关键词 线性系统，逆系统，可逆性判断，降阶逆系统

分类号 O231

On the Inversion of Linear Systems

Zhang Xinjian

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics,
NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper discusses the invertibility of single-input single-output linear systems. A new method for construction the reduced inverse systems is derived. Compared with the reduced inverse systems given by H. L. Silverman, our new reduced inverse systems have lower order, simpler structure and reveals the connection between the rank of observability matrices and the order of inverse systems.

Key words linear system, criterion for invertibility, reduced inverse system

1 逆系统

讨论线性系统的可逆性及其求逆方法，不仅对系统理论本身的发展有着重要意义，而且在系统解耦、模型匹配、滤波与控制等方面也有重要的应用[1~5]。

设有单输入单输出时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维向量，$u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为一维输入和输出。设 $\mathscr{U}$ 是定义在 $[t_0, +\infty)$ 上的输入函数空间，$\mathscr{Y}$ 是相应的输出空间，假定 $\mathscr{U}$ 中的元素在 $[t_0, +\infty)$ 上至少是连续的，则对每个给定的初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$，系统 (1) 确定了一个映射 $H_{x_0}: \mathscr{U} \to \mathscr{Y}$。如果映射 H_{x_0} 是可逆的，则称 (1) 是可逆的。

设 $S_0 = C$, $S_{i+1} = S_iA$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，如果存在一个正整数 T，使 $S_i\boldsymbol{b} = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, T-2)$，$r^{-1} = S_{T-1}\boldsymbol{b} \neq 0$，则由 (1b) 求导并代入 (1a) 可得

$$y^{(T)} = S_T\boldsymbol{x}(t) + r^{-1}u(t) \tag{2}$$

从 (2) 解出 $u(t)$，再代入 (1)，得

---

* 国防科技大学试验技术项目资助

1997年 9月 8日收稿

第一作者：张新建，男，1956年生，副教授

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - r\boldsymbol{b}S_T)\boldsymbol{x}(t) + r\boldsymbol{b}y^{(T)}(t) \tag{3a}$$

$$u(t) = -rS_T\boldsymbol{x}(t) + ry^{(T)}(t) \tag{3b}$$

系统 (3) 就是系统 (1) 的逆系统[1]。

以下，我们首先给出系统 (1) 可逆性的一些判断准则，然后给出降价逆系统的构造过程，最后用例子说明了这一构造法的应用。

2 可逆性的有关判据

定理 1 系统 (1) 可逆的充要条件是存在正整数 $T(\leqslant n)$，使 $r^{-1} = S_{T-1}b \neq 0$

证明 充分性已由上面的讨论得知成立。下面证明必要性。只要证明：若对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有 $S_{k-1}b = 0$，则系统 (1) 不可逆。

根据 Cayley-Hamilton 定理，可知存在一组数 a_i，使

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \tag{4}$$

由 $S_i\boldsymbol{b} = 0$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 及 (4) 式可知，$CA^i\boldsymbol{b} = 0$ $(i \geqslant n)$，从而由 (1) 知，对任一允许输入 u 均有 $y^{(i)}(t) = S_i\boldsymbol{x}(t) = CA^i\boldsymbol{x}(t)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$。再由 (4) 有

$$y^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0 \tag{5}$$

当 $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ 时，得 $y^{(i)}(t_0) = CA^i\boldsymbol{x}(t_0) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$，而 (5) 满足这一初始条件的解是唯一的零解 $y \equiv 0$。又因 u 是任意的，而 H_{x_0} 是线性映射，故不是 1-1 的，即不可逆。

推论 系统 (1) 不可逆的必要条件是其传递函数 $F(s) = 0$

证明 若系统 (1) 不可逆，则由定理 1 知

$$C\boldsymbol{b} = CA\boldsymbol{b} = \cdots = CA^{n-1}\boldsymbol{b} = 0 \tag{6}$$

再由 (4) 式知 $CA^i\boldsymbol{b} = 0$ $(i \geqslant n)$。从而知传递函数

$$\begin{aligned} F(s) &= C(sI - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{s}C\left(I - \frac{1}{s}A\right)^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \frac{1}{s}\left(C\boldsymbol{b} + \frac{1}{s}CA\boldsymbol{b} + \frac{1}{s^2}CA^2\boldsymbol{b} + \cdots + \frac{1}{s^i}CA^i\boldsymbol{b} + \cdots\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中 I 表示单位矩阵。

定理 2 若系统 (1) 是可控且可观测的，则系统 (1) 是可逆的。

证明 若系统 (1) 不可逆，则 (6) 式成立。设系统 (1) 的可控性矩阵与可观测性矩阵分别为 M 和 N，即

$$M = (\boldsymbol{b} \mid A\boldsymbol{b} \mid A^2\boldsymbol{b} \mid \cdots \mid A^{n-1}\boldsymbol{b}),\ N = (C' \mid A'C' \mid (A')^2C' \mid \cdots \mid (A')^{n-1}C')$$

由 (4)(6) 式知 $CA^i\boldsymbol{b} = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$，从而乘积矩阵 $N'M$ 仅由零元素组成，即 $\det(N'M) = 0$，从而 $\det N' = 0$ 或 $\det M = 0$。这说明系统 (1) 不能同时满足可控性与可观测性条件。故系统 (1) 是可逆的。

3 降阶逆系统

定理 3 若 $T(0 < T \leqslant n)$ 是使 $S_{T-1}\boldsymbol{b} = r^{-1} \neq 0$ 的第一个正整数，则 $N_T = (C' \mid A'C' \mid (A')^2C' \mid \cdots \mid (A')^{T-1}C')$ 的秩为 T。

证明 若存在数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{T-1}$ 使

$$\lambda_0 S_0 + \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_{T-1}S_{T-1} = 0$$

则由定理条件 $S_i\boldsymbol{b} = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, T-2)$ 及上式得 $\lambda_{T-1}S_{T-1}\boldsymbol{b} = 0$，但 $S_{T-1}\boldsymbol{b} \neq 0$，故 $\lambda_{T-1} = 0$。于是 $\sum_{i=0}^{T-2}\lambda_i S_i = 0$，则 $\sum_{i=0}^{T-2}\lambda_i S_i A = \sum_{i=0}^{T-2}\lambda_i S_{i+1} = 0$。再由定理条件同样可得 $\lambda_{T-2} = 0$，如此下去，可得 $\lambda_i = 0$ $(i =$

$0, 1, \cdots, \mathrm{T}-1)$. 所以 $S_0, S_1, \cdots, S_{\mathrm{T}-1}$ 是线性无关的, 即秩 $(N_{\mathrm{T}}) = \mathrm{T}$.

设系统 (1) 可逆, $0< \mathrm{T}< n$ 如定理 3所设, 则系统 (1) 具有逆系统 (3). 易知 (3) 仍是 n阶系统. 下面我们寻求 (1) 的降阶逆系统.

设系统 (1)的可观测子空间 V 的维数为 n_1, 由定理 3知 $\mathrm{T} \leqslant n_1$. 可取 V 的一组基为[6]: $S_0', S_1', S_2', \cdots, S_{\mathrm{T}}', \cdots, S_{n_1-1}'$. 再取 $n-n_1$ 个列向量 $\boldsymbol{p}_1', \cdots \boldsymbol{p}_{n-n_1}'$, 使 $T' = (S_0' S_1' \cdots S_{\mathrm{T}-1}' \mid S_{\mathrm{T}}' \cdots S_{n_1-1}' \mid \boldsymbol{p}_1' \cdots \boldsymbol{p}_{n-n_1}') = (N\ M\ P)$ 可逆, 则系统 (1) 在等价变换 $\bar{X}(t) = Tx(t)$ 下变为[6]

$$\dot{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \bar{X}(t) + \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} u = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{\boldsymbol{b}}u \tag{7a}$$

$$y(t) = (\bar{C}_1\ 0)\bar{X}(t) = \bar{C}\bar{X}(t) \tag{7b}$$

其中 $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{\boldsymbol{b}} = T\boldsymbol{b}$, $\bar{C} = CT^{-1}$, $\bar{A}_{11}$为 n_1阶方阵.

设 $\mathrm{T}< n_1$. 由假设知, S_{n_1}可由 $S_0, S_1, \cdots, S_{n_1-1}$线性表出, 设 $S_{n_1} = \sum_{i=0}^{n_1-1} a_i S_i$. 再利用 $S_i = S_{i-1}A$, $TT^{-1} = (N\ M\ P)'T^{-1} = I$, 可算得 $(\bar{A}_{11}\ 0) = (N\ M)'AT^{-1} = N_{n_1}'AT^{-1} = (S_0', S_1', \cdots, S_{n_1-1}')'AT^{-1} = (S_1', S_2', \cdots S_{n_1}')'T^{-1}$, 即

$$A_{11} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n_1-1} \\ a_0 & a_1 \cdots a_{n_1-1} \end{array}\right) \tag{8}$$

同样知 $\bar{\boldsymbol{b}}_1 = (\underbrace{0 \cdots 0}_{\mathrm{T}-1} r^{-1}, \boldsymbol{b}'M)'$, $\bar{C} = (1, 0, \cdots, 0)$. 由此可知

$$y^{(i)}(t) = \bar{x}_{i+1}(t) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{T}-1) \tag{9}$$

$$y^{(\mathrm{T})}(t) = \bar{x}_{\mathrm{T}+1}(t) + r^{-1}u, \quad u = -r\bar{x}_{\mathrm{T}+1}(t) + ry^{(\mathrm{T})}(t) \tag{10}$$

再记

$$\bar{X}_{11} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{\mathrm{T}})', \bar{X}_{12} = (\bar{x}_{\mathrm{T}+1}, \cdots, \bar{x}_{n_1})'$$

$$\bar{X}_1 = (\bar{X}_{11}\bar{X}_{12})', \bar{X}_2 = (\bar{x}_{n_1+1}, \cdots, \bar{x}_n)'$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \cdots a_{\mathrm{T}-1} \end{pmatrix}_{(n_1-\mathrm{T})\times \mathrm{T}}, H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n_1-\mathrm{T}-1} \\ a_{\mathrm{T}} & a_{\mathrm{T}+1} \cdots a_{n_1-1} \end{array}\right) \tag{11}$$

$$\bar{A}_{21} = (F_1 F_2), F_1 \text{为} (n-n_1)\times \mathrm{T}\text{阶矩阵}$$

将 (8)、(9)、(10) 式代入方程 (7a), 得

$$\dot{\bar{X}}_{12} = (H_1 H_2)\bar{X}_1 + M'\boldsymbol{b}(-r\bar{x}_{\mathrm{T}+1} + ry^{(\mathrm{T})}) \tag{12a}$$

$$\dot{\bar{X}}_2 = (F_1 F_2)\bar{X}_1 + \bar{A}_{22}\bar{X}_2 + P'\boldsymbol{b}(-r\bar{x}_{\mathrm{T}+1} + ry^{(\mathrm{T})}) \tag{12b}$$

求方程 (12) 的逆系统, 就是在给定的初始状态下, 对于给定的 y (及其导数), 由系统确定 u. 由 (10)式知, 只要确定了 $\bar{x}_{\mathrm{T}+1}(t)$便确定了 $u(t)$. 由分析知, $\bar{x}_{\mathrm{T}+1}(t)$完全由 (12a)确定. 记$Z(t) = \bar{X}_{12}(t)$, $W(t) = (\bar{X}_{11}' y^{(\mathrm{T})})' = (y, y^{(1)}, \cdots, y^{(\mathrm{T})})'$, 则由 (12a) 有

$$\dot{Z}(t) = \tilde{A}Z(t) + \tilde{B}W(t) \tag{13a}$$

$$u(t) = \tilde{C}Z(t) + \tilde{\boldsymbol{d}}W(t) \tag{13b}$$

其中

$$\tilde{A} = [H_2 - rM'\boldsymbol{b}(1, 0, \cdots, 0),], \tilde{B} = (H_1 \mid rM'\boldsymbol{b})$$

$$\tilde{C} = (-r, 0, \cdots, 0)\ (n_1-\mathrm{T}\text{维}), \tilde{\boldsymbol{d}} = (0, \cdots 0, r)\ (\mathrm{T}+1\text{维})$$

系统 (13) 就是当 $\mathrm{T}< n_1$时, 系统 (1) 的降阶逆系统.

当 $\mathrm{T} = n_1$时, 则 $y^{(i)}(t) = \bar{x}_{i+1}(t)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots n_1-1)$ 且

$$y^{(n_1)}(t) = \bar{S}_{n_1}\bar{X} + \bar{S}_{n_1-1}\bar{\boldsymbol{b}}u = a_0 y + a_1 y^{(1)} + \cdots + a_{n_1-1}y^{(n_1-1)} + r^{-1}u \tag{14}$$

此时, 逆系统退化为

$$u = \tilde{d} W(t) \tag{15}$$

其中 $\tilde{d} = r\ (-a_0, -a_1, \cdots, -a_{n_1-1}, 1)$.

4 算法与举例

我们将求线性系统 (1) 的逆系统的过程归纳如下:

(1) 由 $S_0 = C$, $S_i = S_{i-1}A$ 计算 S_i. 若 $S_i b = 0\ (0 \leqslant i \leqslant n-1)$, 则系统 (1) 不可逆, 算法结束; 否则求出使 $S_{T-1} b = r^{-1} \neq 0$ 的第一个正整数 T.

(2) 求出可观测矩阵 $N = (S_0' S_1' \cdots S_n')$ 的秩 n_1, 且知必有 $T \leqslant n_1 \leqslant n$.

(3) 由线性代数方程组 $S_{n_1} = a_0 S_0 + a_1 S_1 + \cdots + a_{n_1-1} S_{n_1-1}$ 解出唯一解 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n_1-1})$.

(4) 若 $T = n_1$, 则由方程 (15) 得到逆系统, 计算结束; 若 $T < n_1$, 则取 $M = (S_T' \cdots S_{n_1-1}')$, 再按 (11) 式写出 H_1, H_2, 代入方程 (13) 得到逆系统. 结束.

例 **1** 在系统 (1) 中取

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1\ 1\ -1\ 2)$$

求其逆系统.

先算出 $S_0 = (1, 1, -1, 2)$, $S_1 = (-2, -2, 2, 0)$, $S_2 = (4, 4, -4, 4)$. 至此, 由于 $S_0 \boldsymbol{b} = 1$, S_0, S_1, S_2 线性相关, 而 S_0, S_1 线性无关, 且可解得 $S_2 = 2S_0 - S_1$, 即知 $T = 1$, $n_1 = 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $M' = S_1$. 由 (11) 式得 $H_1 = a_0 = 2$, $H_2 = a_1 = -1$. 再记 $W(t) = (y, y^{(1)})'$, 则由方程 (13) 得所求的逆系统为

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= Z(t) + (2, -2) W(t) \\ u(t) &= -Z(t) + (0, 1) W(t) \end{aligned}$$

例 **2** 在系统 (1) 中取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1\ -1\ 1)$$

求其逆系统.

求得 $S_0 = (1, -1, 1)$, $S_1 = (1, -3, 2)$, $S_2 = (1, -9, 5)$, 则知 $S_0 b = 1$, $n_1 = 3$, 即系统是完全可观测的. 再求得 $S_3 = S_2 A = (1, -27, 14)$. 由 $S_3 = a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2$, 解得 $a_0 = -12$, $a_1 = 13$, $a_2 = 0$. 最后求得 $M = (S_1', S_2')$ 且

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}, M' b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

代入方程 (13), 得逆系统

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \tilde{A} Z(t) + \tilde{B} W(t) \\ u(t) &= \tilde{C} Z(t) + \tilde{d} W(t) \end{aligned}$$

其中 $W(t) = (y, y^{(1)})'$ 且

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}, \tilde{C} = (-1\ 0), \tilde{d} = (0, 1)$$

5 结束语

本文关于可逆性及降阶逆系统的讨论可直接推广到线性时变系统的情形, 也可设法推广到多维系统. 尤其是本文关于降阶逆系统的方法对于多维的推广将是一项有意义的工作.

以往的方法求得的降阶逆系统是 $n-T$阶的[1]，我们这里所导出的方法求得的降阶逆系统是 n_1-T 阶的，降低了 $n-n_1$ 阶，且揭示了可观测性矩阵的秩与逆系统阶之间的联系。我们还给出了规范简洁的算法。对于同一个 y，由本文的逆系统求得的 u 与以往的方法所求得的 u 是一致的。

参考文献

1 Silverman L. M. Properties and Application of Inverse Systems. IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, 1968: 436~437

2 Silverman L. M. Payne H. J. Input Output Structure of Linear Systems With Application to the Decoupling Problem. SIAM J. Contr. 1971, 9: 199~232

3 Weinert H. L. On the Inversion of Linear Systems. IEEE Trans. Automat. contr. vol. AC-29, 1984 (10): 956~958

4 张新建. 最小能量控制与 Lg 样条函数. 应用数学, 1991, 4 (4): 16~21

5 张新建等. 广义样条与极小能控制. 国防科技大学学报, 1993, 15 (4): 84~90

6 张洪钺, 程鹏. 现代控制理论 (第一册). 北京航空学院出版社, 1987