国 防 科 技 大 学 学 报
第 20 卷 第 2 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 20 No. 2 1998

最优停止理论中离散化方法的应用*

任建芳　王石

(国防科技大学系统工程与应用数学系　长沙　410073)

摘　要　离散化方法是研究连续参数最优停止理论和马尔可夫过程最优停止理论的有效方法。本文对这一方法进行了阐述，并用此方法解决了两个实际问题。

关键词　最优停止理论，Mertens 引理，Poisson 过程

分类号　O211. 62

Application of Discrete Approximation in Optimal Stopping Theory

Ren Jianfang　Wang Shi

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　Discrete Approximation is an effcient research means for continuous parameter oprimal sropping theory and Markov processes optimal stopping theory. This paper expounds this means in detail, and also uses it to solve two practical problems.

Key words　Optimal stopping theory, Mertens corollary, Possion processes

在最优停止理论中，研究连续参数过程的最优停止问题是很有必要的。因为，一方面许多实际问题是用连续参数的随机过程来刻划的，另一方面，研究连续参数过程的最优停止问题可将最优停止理论的研究推向深入。然而，直接解连续参数的最优停止问题是十分困难的，所以常常要对其进行离散化处理。所谓“离散化”是指用由可列个有理数组成的单调序列来逼近连续过程的参数的方法。这种方法的优势在于：在某种条件下，可以把对连续参数过程性质的研究转化为其在离散情形下的性质的研究上，从而简化了证明。

这种“离散化”思想渗透于最优停止理论的方方面面，是进行最优停止理论研究的有力工具之一。本文具体阐述了“离散化”方法的在连续参数最优停止理论和马尔可夫最优停止理论中的应用。

1　离散化方法在连续参数最优停止理论中的应用

下面我们首先简要说明如何用“离散化”方法求连续参数过程的Snell 包，然后利用“离散化”方法证明了Mertens 引理。

设连续参数报酬过程 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 的 $Snell$ 包为 (γ_t)，令 $\mathscr{T}$ 为几乎处处有限的停时的全体，$\bar{\mathscr{T}}$ 为取值于 $\bar{R}_+$ 的且关于 $\mathscr{F}_t$ 可测的随机变量的全体，为求 γ_t，我们用“离散化”的方法。首先把报酬函数 X_t 离散化：令 $X^b_a=(X\vee a)\wedge b$，其中 a，b 为实数且 $a<b$，再令 N 为某个自然数，q 为二进制有理数，且 $q=0, \frac{1}{2^N}, \cdots, \frac{N\cdot 2^N}{2^N}$，记

$$X^{b,N}_a=\{X^b_a(q), \mathscr{F}_q\}, q=0, \frac{1}{2^N}, \cdots, \frac{N\ \ 2^N}{2^N},$$

然后，求此有界离散参数过程 $X^{b,N}_a$ 的 Snell 包 $\gamma^{b,N}_a(\cdot)$：由后退归纳法可得：

*　1997 年 11 月 5 日收稿
第一作者：任建芳，女，1972 年生，硕士生

$$\mathcal{Y}_a^{b,N}(N) = \mathcal{Y}_a^b(N)$$
$$\mathcal{Y}_a^{b,N}(j2^{-N}) = X_a^b(j2^{-N}) \vee E\left(\mathcal{Y}_a^{b,N}\left((j+1)2^{-N}\ \mathcal{F}_{2^{-N}}\right)\right)$$
$$j = 0, 1, \cdots, N\quad 2^{-N} - 1$$

对于固定的 q，容易证明 $\mathcal{Y}_a^{b,N}$ (q) 是随 N 的增大而不减的，故其极限存在，记为 $\mathcal{Y}_a^b$ (q) $= \lim\limits_{N\to\infty}\mathcal{Y}_a^{b,N}$ (q)，易知 $\{\mathcal{Y}_a^b(q_n), \mathcal{F}_{q_n}, n=0, 1, \cdots\}$ 是常义的离散参数上鞅，$q_1 < q_2 < \cdots$为二进制有理数序列，记 D 为二进制有理数全体。显然对任意实数 t，极限$\lim\limits_{\substack{q_n\downarrow t\\ q_n\in D}}\mathcal{Y}_a^b$ (q_n) 存在，记为 $\mathcal{Y}_a^b$ (t) $= \lim\limits_{\substack{q_n\downarrow t\\ q_n\in D}}\mathcal{Y}_a^b$ (q_n)，由文 [1] 中定理 4. 27 可知，当 $EX_\infty^- < \infty$且对任意的 t，$EX_\infty^- < \infty$时，有

$$\mathcal{Y}(t) = \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to-\infty}\mathcal{Y}_a^b(t)$$

从而得到连续参数过程的 Snell 包：

$$\mathcal{Y}(t) = \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to-\infty}\lim_{\substack{q_n\downarrow t\\ q_n\in D}}\lim_{N\to\infty}\mathcal{Y}_a^{b,N}(q_n)$$

下面我们用 “离散化 ” 方法证明 Mertens 引理。

Mertens 引理　设 $\Gamma = \{\mathcal{Y}_t, \mathcal{F}_t, t\in R_+\}$ 是可选强上鞅，如对每个 $\tau\in\mathcal{T}$，有 $\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{T}}E\mathcal{Y}_{t\vee\sigma} < \infty$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{Y}_t$　$a.\ s$ 存在。

为此，我们需要用到下面的定理[2]：

定理　若 $\{S_n, \mathcal{F}_n, n\geq 1\}$ 为下鞅，对任意 $\mathcal{F}_n$ 停时 $t\in\mathcal{T}$，若 $\int_{t<\infty]}S_t dp \neq \infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ $a.\ s.$ 存在。

注 1:　上述定理的条件等价于，对任意 $\mathcal{F}_n$ 停时 $t\in\mathcal{T}$，$\int_{\tau<\infty]}S_\tau^+ dp < \infty$。

注 2:　因 $\{-S_n, \mathcal{F}_n, n\geq 1\}$ 为上鞅，记为 $\{\tilde{S}_n, \mathcal{F}_n, n\geq 1\}$。对任意 $\mathcal{F}_n$ 停时 $\tau\in\mathcal{T}$，若 $\int_{\tau<\infty]}(S_\tau')^- dp < \infty$，则有

$$\int_{\tau<\infty]}(\tilde{S}_\tau)^+ dp = \int_{\tau<\infty]}(-S_\tau)^- dp = \int_{\tau<\infty]}(S_\tau')^- dp < \infty$$

由（注 1）可知，$\lim\limits_{\tau\to\infty}\tilde{S}_n$　$a.\ s$ 存在，因此可以得到

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{S}_n' = \lim_{\tau\to\infty}(-S_n)\quad a.s\ \text{存在。}$$

Mertens 引理的证明如下：

首先，我们任取一列趋于无穷的有理数序列 $\{q_n\}$，则 $\{\mathcal{Y}_{q_n}, \mathcal{F}_{q_n}, n\geq 1\}$ 为上鞅，对任意取值于 $\{q_n\}$ 的停时 $s\in\mathcal{T}$，令 $\sigma_0 = sI_{[s<\infty]}$，则 $\sigma_0\in\mathcal{T}$，因为

$$\mathrm{E}\mathcal{Y}_s I_{[s<\infty]} = \mathrm{E}\mathcal{Y}_{s\wedge\mathcal{A}}I_{[\mathcal{T}_s<\infty]} \leq \mathrm{E}\mathcal{Y}_{s\wedge\mathcal{A}}I_{[\mathcal{T}_s<\infty]} + \mathrm{E}\mathcal{Y}_s I_{[s=\infty]}$$
$$= \mathrm{E}\mathcal{Y}_{\mathcal{T}\wedge s} \leq \sup_{\sigma\in\mathcal{T}}\mathrm{E}\mathcal{Y}_{\mathcal{T}_n\wedge\sigma} < \infty$$

即：　$\mathrm{E}\mathcal{Y}_s I_{[\mathcal{T}_s<\infty]} < \infty$，由（注 2）可知，$\lim\limits_{q_n\to\infty}\mathcal{Y}_{q_n}$　$a.\ s.$ 存在。

因为对任意趋于无穷的有理数列 $\{q_n\}$，总有$\lim\limits_{q_n\to\infty}\mathcal{Y}_{q_n}$　$a.\ s$ 存在，所以，有$\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{Y}_t$　$a.\ s.$ 存在，从而证明了 Mertens 引理。

2　离散化方法在马尔可夫最优停止理论中的应用

在这部分，我们将利用离散化方法求解马尔可夫过程的值函数。

设马氏过程（y_t，$\mathcal{F}_t$），状态空间为 E，设 g（·）$\in B$（A^-）的值函数为 V（x）$= \sup\{Eg_t, t\in\mathcal{T}\}$。

由于 g（·）$\in B$（A^-），故值函数 V（x）等于 g 的最小过份控制 v（x），即

$$V(x) = \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}Q_n^N g(x)$$

其中

$$Q_n g(x) = \max\{g(x), T_{2^{-n}} g(x) - c2^{-n}\}$$

$$Q_n^N g(x) = \underbrace{Q_n(Q_n \cdots (Q_n}_{N\ 个} g(x)))$$

$$T_t g(x) = \int g(u) p(t, x, du)$$

其中，$p(t, x, y)$ 为马氏过程的转移函数。

下面求解一个具体的马氏过程的值函数。

设 $\{X_t\}_{t\in[0,a]}$ 为 Poisson 过程，其初始状态为 $P\{X_0 = x_0\} = 1$，状态空间为 $Z^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$，状态转移函数为:

$$p(t, x, y) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda t}, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$$

设 A 为状态空间的子集，则 $p(t, x, A) = \sum\limits_{\substack{y\in A \\ y\geq x}} \dfrac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda t}$。

设 $Y_t = e^{X_t} - ct$，其中 ct 为 t 时的费用，$c > 0$ 为常数，Y_t 表示 t 时的报酬。令 $\mathscr{F}_t = \sigma(Y_u: 0 \leq u \leq t)$，则 $(Y_t, \mathscr{F}_t, t \in [0, a])$ 为马氏过程，其关于 $g(x) = e^x$ 的值函数为 $V(x)$。这一问题具有很强应用背景。下面求这个值函数 $V(x)$

因为

$$T_t g(x) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{e^y (\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{y=x}^{\infty} e^{y-x} e^x \frac{(\lambda t)^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda t} = e^x e^{\lambda(e-1)t}$$

所以

$$Q_n g(x) = \max\{g(x), g(x) e^{\lambda(e-1)2^{-n}} - c2^{-n}\}$$

$$Q_n^N g(x) = \max\{g(x), g(x) e^{\lambda(e-1)2^{-n}} - c2^{-n}, \cdots, g(x) e^{\lambda(e-1)N2^{-n}} - cN2^{-n}\}$$

故

$$V(x) = \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} Q_n^N g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } g(x) \geq g(x) e^{\lambda(e-1)a} - ca\} \\ g(x) e^{\lambda(e-1)a} - ca & otherwise\} \end{cases}$$

最优停时为:

$$\sigma \equiv 0 \text{ 或 } \sigma = \inf\{t_0 \leq t \leq a: e^{x_t} - ct = g(x_0) e^{\lambda(e-1)a} - ca\}$$

其中 t_0 满足方程 $e_{x_0} - e^{x_0 \lambda(e-1)t} - ct = 0$,

$$EY_\sigma = \begin{cases} g(x_0), & \sigma = 0 \\ g(x_0) e^{\lambda(e-1)a} - ca, & \text{otherwise} \end{cases}$$

本文阐述了离散化方法在连续参数最优停止理论和马尔可夫最优停止理论中的应用，表明这种方法求解上述问题时十分有效。

参考文献

1 金治明. 最优停止理论. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995

2 YuanShih Chow, Henry Teicher. Probability Theory. Springer Verlag, New York Inc. 1978