国 防 科 技 大 学 学 报
第20卷 第3期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.20 No.3 1998

条件事件的表示*

李 兵

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 为了进行条件推理，本文讨论了条件事件的表示，并给出了相应的逻辑运算规则，引入了零事件间的概率比和多重条件事件的超条件事件概率的概念，它们均是无条件情形的推广。

关键词 条件事件，表示，逻辑运算，零事件，超条件事件概率

分类号 E96

Expression of Conditional Events

Li Bing

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In order to make conditional inference, the expression of conditional events is discussed in this paper. The corresponding rules of logical operations are given. The concepts of the probabilitic ratio between two zero- events and conditional hyperprobability for iterated conditional events are introduced.

Key words conditional event, expression, logical operation, zero- event, conditional hyperprobability

知识的获取、表示与推理一般来说都是条件意义下的。对于各种复杂环境，用条件事件来刻画其各种可能的情况十分必要。问题是经典概率论仅仅只涉及到了条件概率，而并未触及到条件问题的实体条件事件，也就更谈不上进行条件推理了。本文讨论条件事件的表示，并给出相应的逻辑运算规则，引入零事件间的概率比和多重条件事件的超条件事件概率的概念，它们均是无条件情形的推广。

1 条件事件的表示

假定给出了基本概率空间(Ω, F, P)，$\forall A \in F, P(A) > 0$，首先定义条件概率测度 P_A 如下

$$P_A(B) = \frac{1}{P(A)}(I_A P)(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \forall B \in F$$

其中$(I_A P)(B) \overset{\Delta}{=} \sum_{\omega \in B} I_A(\omega) P(\{\omega\})$，($I_A$ 表示 A 的示性函数)。

其次定义全体 P_A 零集 $N(P_A)$

$$N(P_A) = \{B \quad B \in F, P_A(B) = 0\}$$

记 N_A 为其极大零集，则 $N(P_A) = \{X \quad \exists Y \in F, X = Y \cap N_A\}$

在 F 上将对称差运算与交运算分别定义为加法运算(+)与乘法运算( )，则 F 为一 Bool 环，其相对于加法运算的核元为空集$\varnothing$，逆元为自身(因为 $A \Delta A = \varnothing$)。由 Bool 环理论可知：F 的主理想为 $N(P_A)$，它可在 F 上产生一等价关系。

$$Y, Z \text{ 在同一类是指：} Y \Delta N(P_A) = Z \Delta N(P_A)\text{. 并记为} Y \equiv_A Z$$

若两事件的对称差包含在主理想内，则它们是在同一类。

对此等价类有如下性质：

---

* 国防预研基金资助项目
1997年9月25日收稿
第一作者：李兵，男，1963年生，副教授

$$\forall B, C \in F, \text{若} \exists Z \in F, s.t. B, C \in Z\Delta N(P_A), \text{则} P_A(B) = P_A(C).$$

亦即在同一类中的事件有相同的条件概率, 由此我们引入条件事件的定义

定义**1** 条件事件$[B \mid A]$为一具有相同条件概率的事件集合:

$$[B \mid A] = \{C \mid \exists Z \in N(P_A), C = B\Delta Z\} = B\Delta N(P_A)$$

可以证明[1]: 条件事件$[B \mid A]$为一从$A \cap B$到$\bar{A} \cup B$的事件区间, 即

$$[B \mid A] = \{C \mid A \cap B \subseteq C \subseteq \bar{A} \cup B\}$$

这表明条件事件$[B \mid A]$为满足以下关系的事件集合:

"若 $\omega \in A$, 则 $\omega \in B$ "

2 条件事件间的逻辑运算

条件事件$[A \mid H]$与$[B \mid K]$间的与运算$\wedge$、或运算$\vee$及非运算c分别定义如下:

$$[A \mid H] \wedge [B \mid K] = [AB \mid HK]$$

$$[A \mid H] \vee [B \mid K] = [AH \cup BK \mid H \cup K]$$

$$[A \mid H]^c = [A^c \mid H]$$

满足条件情形的 De Morgan 律:

$$([A \mid H] \vee [B \mid K])^c = [(AH)^c \mid H \cup K] \wedge [(BK)^c \mid H \cup K]$$

$$([A \mid H] \wedge [B \mid K])^c = [(AH)^c \mid HK] \wedge [(BK)^c \mid HK]$$

特别当$H = K = \Omega$时, 上式即为通常的 De Morgan 律。

还有类似于无条件情形的次可加性:

$$P([A \mid H] \vee [B \mid K]) \leq P([A \mid H]) + P([B \mid K])$$

事实上$P([A \mid H] \vee [B \mid K])$

$$= P([AH \cup BK \mid H \cup K])$$

$$= P([AH \mid H \cup K]) + P([BK \mid H \cup K]) - P([AHBK \mid H \cup K]):$$

$$= P([A \mid H])P([H \mid H \cup K]) + P([B \mid K]) - P([AHBK \mid H \cup K])$$

$$\leq P([A \mid H]) + P([B \mid K])$$

关于等价关系它还对并与交运算封闭:

$$Y \equiv_A Z \Rightarrow Y \cup X \equiv_A Z \cup X, \forall X \in F$$

$$Y \equiv_A Z \Rightarrow Y \cap X \equiv_A Z \cap X, \forall X \in F$$

我们来看第一个式子另一个类似。

若$Y \equiv_A Z$, 则$Y \cap A = Z \cap A$, 从而$(Y \cup X) \cap A = (Z \cup X) \cap A$, 再由条件事件代数的性质知: $\exists V \in F, s.t. Y \cup X, Z \cup X \in [V \mid A]$., 即可得到第一个式子。

关于事件间的逻辑运算, 有时根据具体的问题还有其它的定义, 如 De Finetti 和 Goodman[1] 等人定义为:

$$[A \mid H] \wedge [B \mid K] = [AB \mid A^cH \cup B^cK \cup HK]$$

$$[A \mid H] \vee [B \mid K] = [AB \cup BK \mid AH \cup BK \cup HK]$$

3 零事件间的概率比

我们把概率为0的事件称之为零事件。在统计中对它一般不予考虑, 但在实际中许多事情的发生是零概率的, 却又不能不理它, 例如在 C^{3}I 考虑敌我态势分析时, 敌方对我方发动核战争是一零事件, 但我们必须研究在此情况下我方实施核报复的问题。经典概率论中的条件概率$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$是在$P(B) > 0$的条件下定义的, 这是因为当$P(B) = 0$时, B与AB均为零事件, 其概率比为$\dfrac{0}{0}$型。为了在零事件间同样能够进行比较, 我们引入关于零事件E与H的概率比$\dfrac{P(E)}{P(H)}$的定义。

由于条件事件概率测度是在条件事件代数上对原有的概率测度进行扩张而得的[2] (仍记为P), 故

条件事件概率 $P([A\ \ B])$ 对任何事件(包括零事件)均有意义,因此 $P([E\ \ E\cup H])$ 与 $P([H\ \ E\cup H])$ 均有意义,且有 $P([E\ \ E\cup H])+P([H\ \ E\cup H])\geq 1$

事实上由前面给出的条件次可加性及或运算的定义,有

$$\begin{aligned} & P([E\ \ E\cup H])+P([H\ \ E\cup H]) \\ & \geq P([E\ \ E\cup H]\vee[H\ \ E\cup H]) \\ & = P\{[E(E\cup H)\cup H(E\cup H)\ \ (E\cup H)(E\cup H)]\} \\ & = P([E\cup H\ \ E\cup H]) \\ & = 1 \end{aligned}$$

从而 $P([E\ \ E\cup H])$ 与 $P([H\ \ E\cup H])$ 不能全为零。而当 $P(E)P(H)>0$时,有

$$\frac{P(E)}{P(H)}=\frac{P([E\ \ E\cup H])}{P([H\ \ E\cup H])}$$

故当 $P(E)=P(H)=0$时,仍定义

$$\frac{P(E)}{P(H)}\triangleq\frac{P([E\ \ E\cup H])}{P([H\ \ E\cup H])}$$

这样就不会出现$\frac{0}{0}$的问题了。

4 多重条件事件的超条件事件概率

实际中由于系统的复杂性常需考虑多重条件事件的问题,对于多重条件事件的处理可以使我们对复杂系统逐步地进行分析、推理,以降低该过程的复杂度。

类似于前面所作的条件事件间的逻辑运算,同样可定义多重条件事件间的逻辑运算。当然我们最关心的是如何定义多重条件事件的概率,其定义必须是一般条件事件概率的推广。这里我们给出它的一个定义,并称此多重条件事件的概率为超条件事件概率。具体定义如下:

$$P^{*}[(A\ \ H)\ \ (B\ \ K)]=\begin{cases}\dfrac{P([A\ \ H]\wedge[B\ \ K])}{P([B\ \ K])}, & \text{if } P([B\ \ K])>0\\[2ex] \dfrac{P([A\ \ B]\wedge[H\ \ K])}{P([H\ \ K])}, & \text{if } P([H\ \ K])>0\end{cases}$$

首先我们指出上式是无歧义的,即当 $P([B\ \ K])>0$, 且 $P([H\ \ K])>0$时,有$\dfrac{P([A\ \ H]\wedge[B\ \ K])}{P([B\ \ K])}=\dfrac{P([A\ \ B]\wedge[H\ \ K])}{P([H\ \ K])}$ 可验证如下:

$$\frac{P([A\ \ H]\wedge[B\ \ K])}{P([B\ \ K])}=\frac{P([AB\ \ HK])}{P([B\ \ K])}=\frac{P(ABHK)\setminus P(HK)}{P(BK)\setminus P(K)}=\frac{P(ABHK)P(K)}{P(BK)P(HK)},$$

$$\frac{P([A\ \ B]\wedge[H\ \ K])}{P([H\ \ K])}=\frac{P([AH\ \ BK])}{P([H\ \ K])}=\frac{P(ABHK)\setminus P(BK)}{P(HK)\setminus P(K)}=\frac{P(ABHK)P(K)}{P(BK)P(HK)}.$$

其次我们看到特别当 $H=K=\Omega$时,超条件事件概率就是条件事件概率。

5 结论

本文讨论了条件事件的表示与条件事件间的逻辑运算, 并给出了一个零事件间的概率比及多重条件事件的超条件事件概率的定义,这些结果均是无条件情形的推广,应用条件事件方法于智能推理将能较好地解决条件推理问题, 目前已应用于 C^{3}I 系统等领域,取得了较好的效果。

参考文献

1 Goodman I et al. Conditional Inference and Logic for Intelligent System, Amsterdam Elsevier, 1991

2 Angelo Gilio et al. Conditional Events in Probability Assessment and Revision, IEEE Transaction on S. M .C, 1994, 24 (12)

3 Marcus Spies. Conditional Events, Conditioning, and Random Sets. IEEE Transaction on S. M. C, 1994, 24 (12)

4 张文修,梁怡. 不确定性推理原理. 西安: 西安交通大学出版社, 1996