分布参数管道的一种改进的小分段数有限元模型*

刘昆 张育林

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘 要 在分段数为1和2时,现有有限元模型的一阶谐振频率比一维分布参数模型的一阶谐振频率低许多,因而其适用的频率范围较低,计算精度较差。本文提出了一种改进的小分段数有限元模型,通过修正流体管道的并联导纳使分段数为1和2时的有限元模型的一阶谐振频率与一维分布参数模型一致,从而提高了其使用的频率范围和计算精度。利用单根管道阀门关闭的水击问题的仿真计算对改进模型的效果进行了验证。在分段数为2时,原有的有限元模型的计算结果与分布参数模型的计算结果相差较大,而改进后的模型的计算结果与分布参数模型的计算结果基本一致。

关键词 分布参数,流体管道,分段近似,集中参数,模型

分类号 V414.1

A Modified Small Element-number Finite Element Model for Distributed Parameter Fluid Pipes

Liu Kun Zhang Yulin

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The existing finite element model is suitable only for low frequency range and not precise because to its first order resonant frequency is much lower than that of one-dimension model when its element number is 1 and 2. A modified small element-number finite element model is pressented here, it equates its first order resonant frequency to that of one-dimension model by modifying the shunt admittance of the pipes when the element number n= 1 and n= 2, therefore increases its usage frequency range and computation precision greatly. Corroboration of our model's modified effectiveness is given by the simulated results of the water hammer of a single pipe after valve closure. When n= 2, the calculated results obtained by using the existing finite element model deviate from those obtained by using one-dimension model obviously, but the calculated results by using the modified finite element model agree well with these by using one-dimension model.

Key words distributed parameter, fluid pipes, piecewise approximation, lumped parameter, models

描述管路流体非恒定运动的一维分布参数模型是一对拟双曲偏微分方程,尽管可以采用特征线方法对其进行数值求解,但它对包含流体管路的控制系统(如推力可调节的补燃发动机)的分析与综合是不太适用的。因此,有不少学者在致力于发展分布参数流体管道的集中参数近似模型。

分布参数管道的集中参数近似方法有3种[1]:有限元法,台劳级数展开法和无限乘积法。其中,无限乘积法,以及在此基础上发展起来的模态近似法[2~3]的效率最高,只需用较小阶数的集中参数模型就可以在较宽的频率范围取得很好的近似精度。采用台劳级数展开时,当台劳级数展开到第5项时,就不能保持展开函数的主要特性,且产生不稳定现象。采用有限元法时,要满足分段长度远小于波长才能取得较好的近似精度,因此,当管道长度较长时,分段数较大,系统模型变得很复杂,所以,传统

* 1997年12月10日收稿
第一作者:刘昆,男,1965年生,副教授

的有限元法的效率不高。然而，无论是无限乘积法（模态近似法）还是台劳级数展开法，要获得管道的集中参数等效线路是困难的，这在利用流体网络理论分析和设计流体管道系统时会带来不方便，而有限元法可以直接给出管道的集中参数等效线路，从而可以充分利用电气网络各种成熟的分析设计手段和方法来分析、设计流体网络系统。从实际应用的角度来考虑，在我们关心的中频范围内，如果能用 1～2 个分段的有限元模型来较好地近似描述流体管道的动态特性，将会大大扩展其应用的范围，这正是本文的研究出发点。

1　流体管道的一维分布参数模型和有限元模型

描述一维分布参数流体管道动态特性的基本方程为

$$\begin{bmatrix} p_a(s) \\ Q_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\Gamma(s) & Z_c(s)\,\mathrm{sh}\Gamma(s) \\ \frac{1}{Z_c(s)}\mathrm{sh}\Gamma(s) & \mathrm{ch}\Gamma(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b(s) \\ Q_b(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中，$\Gamma(s)=L\sqrt{Z(s)Y(s)}$ 为传播算子，L 为管道长度，$Z(s)$ 和 $Y(s)$ 分别为管道的单位串联阻抗和并联导纳；$Z_c(s)=\sqrt{Z(s)/Y(s)}$ 为特征阻抗；$p_a(s)$、$Q_a(s)$ 和 $p_b(s)$、$Q_b(s)$ 分别为管道上游和下游的压力、体积流量的拉普拉斯变换。

方程（1）中包含双曲函数，应用起来十分不方便。将流体传输管道等分为 n 段，每一分段用一个 T 型网络来近似模拟，则流体传输管道的电气模拟网络为图 1 所示。

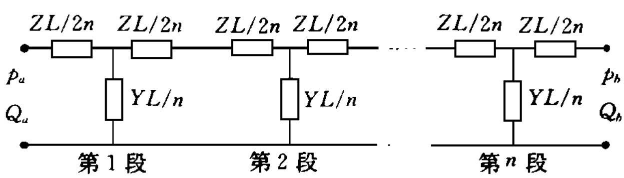

图 1　流体传输管道的电气模拟

其传输方程可表示为

$$\begin{bmatrix} p_a(s) \\ Q_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2}ZY\left(\frac{L}{n}\right)^2 & Z\frac{1}{n}+\frac{1}{4}Z^2Y\left(\frac{L}{n}\right)^3 \\ Y\frac{L}{n} & 1+\frac{1}{2}ZY\left(\frac{L}{n}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_b(s) \\ Q_b(s) \end{bmatrix} \tag{2}$$

2　小分段数有限元模型的改进

考虑一终端封闭的流体管道，则管道的负载阻抗 $Z_R=p_b(s)/Q_b(s)$ 为无穷大。在忽略管道流体粘性和热传导效应时，其传播算子 $\Gamma(s)=\frac{l}{a_0}s$。计算分布参数模型和分段数 $n=1,2$ 时有限元模型的压力比函数 $p_b(s)/p_a(s)$ 与谐振频率，其比较情况见表 1。

表 1　一维分布参数模型与有限元模型（$n=1,2$）的比较（$Z_R=\infty$）

模型	n	$p_b(s)/p_a(s)$	无阻尼谐振频率
有限元模型	1	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\Gamma^2}$	$\omega_1=\sqrt{2}\,\frac{a_0}{L}$
	2	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\Gamma^2+\frac{1}{32}\Gamma^4}$	$\omega_{1,2}=2\sqrt{2\mp\sqrt{2}}\,\frac{a_0}{L}$
一维分布参数模型	∞	$\frac{1}{\mathrm{ch}\Gamma}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2!}\Gamma^2+\frac{1}{4!}\Gamma^4+\cdots}$	$\omega_i=(i-0.5)\pi\frac{a_0}{L},\ i=1,2,3\cdots$

由表 1 可以看出，在分段数较小 ($n = 1, 2$) 时，有限元模型的谐振频率与分布参数模型对应的低阶谐振频率要低，它们之间存在较大的误差，这样，有限元模型要在比一阶谐振频率低许多的频率范围内才具有较好的近似精度。

采用有限元模型使谐振频率降低的物理解释是：$n = 1$ 时，有限元模型中是考虑整个管道流体同时受压缩的情形，而实际上管道流体并不是同时受到压缩。分段数越多，管道流体同时受压缩的可能性越小，越能较精确地近似模拟管道流体的非恒定流动。

众所周知，管道的单位并联导纳反应了流体受压缩的特性，由此想到，如果我们在有限元模型中对管道的单位并联导纳 Y 进行修正，使分段的受压缩体积变小些，这样至少可以做到使有限元模型的一阶谐振频率与分布参数模型的一阶谐振频率相等，从而可以在接近于一阶谐振频率的频率范围内获得较好的近似精度。

令 $Y' = \xi Y, \xi < 1$，将(2) 式中的 Y 用 Y' 代替，不难得到其修正后的传输方程。修正后有限元模型的谐振频率为

$$n = 1 \text{时}, \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{\xi}}\frac{a_0}{L}; n = 2 \text{时}, \omega_{1,2} = 2\sqrt{\frac{2\mp\sqrt{2}}{\xi}}\frac{a_0}{L}$$

令修正后有限元模型的一阶谐振频率等于分布参数模型的一阶谐振频率，可分别获得在分段数 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时的修正系数：

$n = 1$ 时，$\xi = 0.8106$；$n = 2$ 时，$\xi = 0.9496$

当分段数 $n \geq 2$ 时，要同时使有限元模型的 1、2 阶谐振频率与分布参数模型对应的谐振频率相等是不可能的。对分段数 $n \geq 3$，修正系数 ξ 已十分接近于 1，修正的效果已不明显。

3 仿真验证

为了验证本文提出的改进的有限元模型的效果，对图 2 所示的单根管道阀门关断的水击问题进行了仿真计算。原始参数：流动介质为水，$p_T = 20.0\text{MPa}, \rho_0 = 1000\text{kg/m}^3, a_0 = 1200\text{m/s}, D = 0.06\text{m}$，额定流量系数 $\overline{C_V A_V} = 0.002$，阀门的相对开度按一通频带为 500Hz 的指数变化曲线关闭，$\tau = \begin{cases} e^{-1000\pi t} & t \leq 0.003s \\ 0 & t > 0.003s \end{cases}$，$\tau = C_V A_V / \overline{C_V A_V}$。为考察改进的小分段数有限元模型对不同长度的管道的适应情况，计算了 2 种管道长度：(1) $L = 2.4\text{m}, p_E = 19.7\text{MPa}$；(2) $L = 24\text{m}, p_E = 19.0\text{MPa}$。并假定在阀门的快速关闭过程中，出口压力 p_E 近似保持不变。

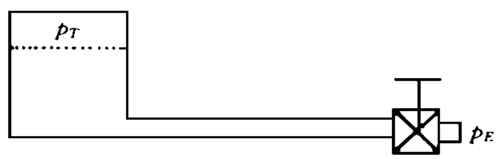

图 2 连接贮箱和阀门的单支管道

管道的摩擦损失按准稳态的关系式处理。有限元模型的计算结果与一维分布参数模型（采用特征线方法计算，网格数 $n = 20$）的计算结果的比较见图 3 和图 4，图中的无量纲时间为 ta_0/L。

4 结论

仿真计算结果表明：和一维分布参数模型相比，现有的小分段数的有限元模型的计算结果在时间相位上存在明显的误差；而改进后的模型在时间相位上与特征线方法保持一致，幅值上，2 个分段的有限元模型与一维分布参数模型基本一致，1 个分段的有限元模型还存在较明显的误差。此外，改进后的小分段数有限元模型的近似精度对管道长度的变化不太敏感。通过理论分析与仿真计算，可以得到以下结论：

(1) 改进后的模型显著提高了小分段数有限元模型的精度；

(2) 对短管道 ($L < 20\text{m}$)，在关心的中频（50Hz）范围内，改进后的 2 个分段的有限元模型可以较好地近似描述其动力学行为。

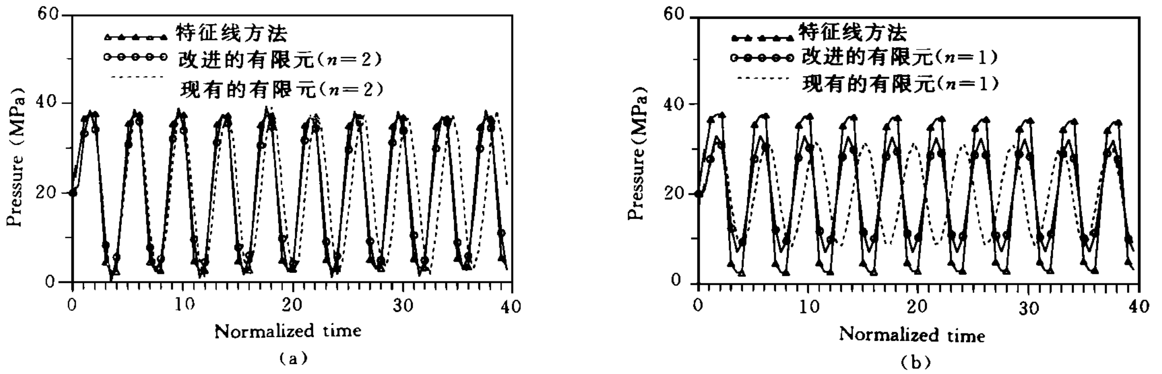

图 3 阀门按指数曲线关断后阀门前的压力曲线 (L = 2.4m)

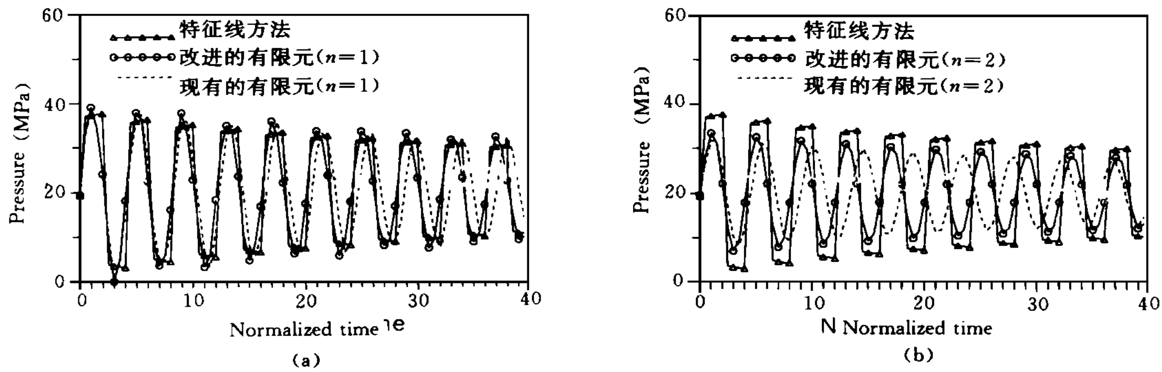

图 4 阀门按指数曲线关断后阀门前的压力曲线 (L = 24m)

参考文献

1 罗志昌. 流体网络理论. 北京: 机械工业出版社, 1988

2 Hullender D A, Healey A J. Rational Polynomial Approximations for Fluid Transmission Line Model. Fluid Transmission Line Dynamics: New York, ASME Special Publication, 1981

3 Yang W C, Tobler W E. Dissipative Modal Approximation of Fluid Transmission Lines Using Linear Friction Model. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1991, 113: 152~162