

Poisson方程生成数值网格方法中的源项计算法^{*}

杨秀庭 王振国 刘卫东

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 网格生成是数值研究方法得以实现的基础。本文采用了 Poisson 方程生成数值网格, 并针对方程源项的选择问题, 对两种形式的源项作了比较研究。

关键词 网格生成, 数值计算, 液体火箭发动机

分类号 V 434 13

The Method of Source Terms Calculation in Grid Generation by Poisson Equations

Yang Xiuting Wang Zhenguo Liu Weidong

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha 410073)

Abstract Grid generation is very important to the numerical calculation of fluid flow. Many methods available can be used to achieve the target, but in this paper, only the method of Poisson equations was discussed. In addition to the traditional forms of source terms recommended by Thompson, a new one deduced by the authors was used in the calculation, and the comparison between the two forms gives several valuable conclusions.

Key words numerical grid generation, numerical calculation, liquid rocket engine

数值网格生成方法是一种用数值计算的办法来生成区域计算网格的方法, 它在数值研究中占有十分重要的地位^[1]。一般而言, 数值网格的生成方法分为代数方法和微分方程方法两大类。自 70 年代 Thompson 等人提出用椭圆型方程来生成网格以来, 在这方面的研究已有了十分引人注目的进展。在数值计算过程中, 为保证差分离散方程和原微分方程的相容性要求, 以及减小边界条件处理过程中所带来的误差, 提高计算精度, 要求生成的网格较好地满足正交性条件, 并可以进行局部区域加密^[2]。对于边界光滑的贴体网格生成问题, 椭圆型方程方法具有较大的优越性, 既可以处理定常或非定常问题, 又可以处理二维或三维问题, 并且生成的网格的质量很高; 但对于存在边界突变的问题, 还需结合其他方法, 才能得到较为理想的网格。本文主要针对 Poisson 方程网格生成方法的网格质量和网格加密效果, 对 Poisson 方程方法的两种不同的源项形式作了比较。

1 网格生成

Poisson 方程生成数值网格是通过求解离散化的 Poisson 方程来实现。网格的加密由方程的源项来控制。本文中源项的取法, 一种方法是给出 Thompson 推荐的指数形式的源项, 通过调节源项的参数来实现网格的局部加密, 但这种源项形式所涉及的控制参数太多, 选择起来不容易, 可控性较差。另一种方法则是参照 Thomas 的思路^[3, 4], 通过给定边界条件, 构造出边界上的源项, 而后再通过数值插值, 得到整个物理域上的源项, 这样, 网格的加密事实上直接由边界条件来控制。

1.1 控制方程

设从物理平面到计算平面的连续可微的变化函数为:

^{*} 国家 863 计划项目资助
1998 年 3 月 10 日修订
第一作者: 杨秀庭, 男, 1973 年生, 硕士

$$\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x, y) \\ Z(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

设存在逆变换, 则其逆变换函数为:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\bar{a}, \bar{Z}) \\ y(\bar{a}, \bar{Z}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

于是得到由计算平面 (\bar{a}, \bar{Z}) 内的矩形网格到物理平面 (x, y) 的贴体网格的变换应满足的 Poisson 方程:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xx} + \bar{a}_{yy} &= p(\bar{a}, \bar{Z}) \\ \bar{Z}_{xx} + \bar{Z}_{yy} &= q(\bar{a}, \bar{Z}) \end{aligned} \quad (3)$$

其反变换方程为:

$$\begin{aligned} T_{\bar{a}\bar{a}} - 2U_{\bar{a}\bar{Z}} + V_{\bar{Z}\bar{Z}} + J^2(p_{\bar{a}\bar{a}} + q_{\bar{Z}\bar{Z}}) &= 0 \\ T_{\bar{y}\bar{a}\bar{a}} - 2U_{\bar{y}\bar{a}\bar{Z}} + V_{\bar{y}\bar{Z}\bar{Z}} + J^2(p_{\bar{y}\bar{a}\bar{a}} + q_{\bar{y}\bar{Z}\bar{Z}}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} T &= x^2 + y^2, \quad U = xaxz + yayz, \quad V = xa^2 + ya^2, \\ J &= xayz - xzya \end{aligned}$$

1.2 源项

Thompson 给出的源项形式为:

$$\begin{aligned} p(\bar{a}, \bar{Z}) &= - \sum_{i=1}^{N_a} T_i \text{sign}(a - \bar{a}_i) \exp(-c_i |a - \bar{a}_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m_a} b_j \text{sign}(a - \bar{a}_j) \exp(-d_j \sqrt{(a - \bar{a}_j)^2 + (Z - \bar{Z}_j)^2}) \\ q(\bar{a}, \bar{Z}) &= - \sum_{i=1}^{N_Z} T_i \text{sign}(Z - \bar{Z}_i) \exp(-c_i |Z - \bar{Z}_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m_Z} b_j \text{sign}(Z - \bar{Z}_j) \exp(-d_j \sqrt{(a - \bar{a}_j)^2 + (Z - \bar{Z}_j)^2}) \end{aligned} \quad (5a)$$

Thomas 方法由给定的边界条件, 构造边界的源项, 然后再通过数值插值, 得到整个物理平面上的源项

对于方程组 (4), 沿每一簇等 \bar{a} 等 \bar{Z} 线, 为保证物理平面的正交性, 应有 $\nabla \bar{a} \cdot \nabla \bar{Z} = 0$ 即 $U = xaxz + yayz = 0$ 利用这点, 对方程组 (4) 作处理, 得到控制方程源项的形式如下:

$$\begin{aligned} p(\bar{a}, \bar{Z}) &= - [\Gamma(xax\bar{a}\bar{a} + yay\bar{a}\bar{a}) + V(xaxZ + yayZ)] / (\bar{V}^2) \\ q(\bar{a}, \bar{Z}) &= - [\Gamma(xz\bar{a}\bar{a} + yz\bar{y}\bar{a}\bar{a}) + V(xz\bar{Z}\bar{Z} + yz\bar{y}\bar{Z}\bar{Z})] / (\bar{V}^2) \end{aligned} \quad (5b)$$

由这种方法构造源项, 简单快捷, 避免了 Thompson 方法中选择多个控制系数时所遇到的困难。

2 算例及结果分析

根据以上两种不同形式的源项, 针对生成相同要求的数值网格, 比较了这两种方法的优劣

图 1 为生成最简单的液体火箭发动机燃烧室内网格的例子, 图 2 为液体火箭发动机推力室内网格生成例子。图 1(a)和图 2(a)利用 (5a)的源项给法生成网格, 取收缩因子 $T_i = 50000$ $c_i = 0.6$ 图 1(b)和图 2(b)则通过 (5b)的方法给出源项, 先确定边界条件, 而后求解 Poisson 方程, 得到相应的数值网格。由于火箭发动机推力室中流场参数的变化特性, 要求在参数变化较为剧烈的头部区、壁面区和喉部区多布置网格点。从图 2 的结果看, 式 (5a)的方法要优于式 (5b)的方法, 生成的网格具有良好的正交性, 并且局部加密的要求也能得到较好的满足。式 (5b)方法在局部加密的要求上较式 (5a)方法具有更大的灵活性, 可以通过边界条件方便地予以控制, 但网格的正交性显然太差。图 3 图 4 为图 2(a)网格下推力室内的压力与马赫数等值线分布图, 与试车结果较为符合。

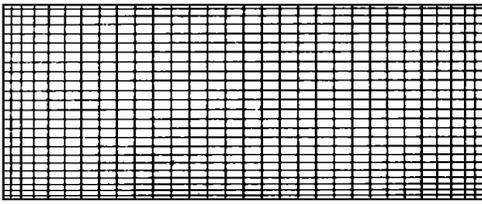


图 1 (a)

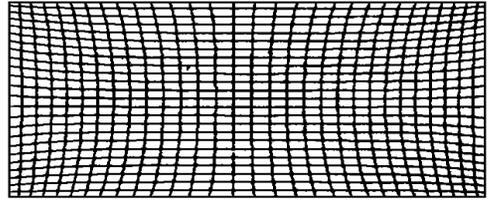


图 1 (b)

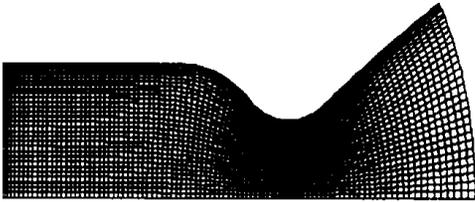


图 2 (a)

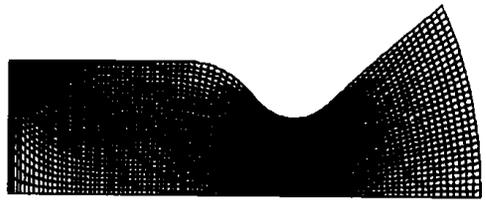


图 2 (b)

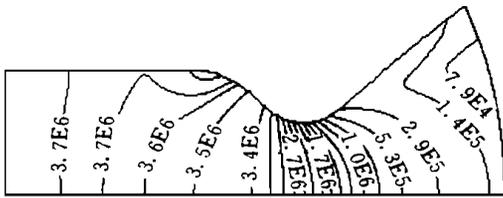


图 3 压力等值线

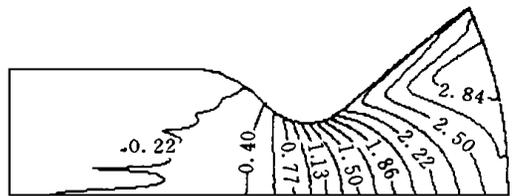


图 4 温度等值线

3 结论

(1) 网格生成的计算实例表明, Thompson 推荐的源项给法虽然控制参数多, 可控性差, 但生成的网格质量较高, 在复杂的流场计算中, 仍然是可取的。

(2) 针对不同的计算要求, 可以用不同形式的源项来生成网格, 对网格优劣性的评估, 则由计算所需的条件和成本来决定, 而并非哪种方法具有绝对的优越性。

(3) 以上两种方法均可以方便地推广到三维情况。

参考文献

- 1 忻考康, 刘儒勋, 蒋伯庆. 计算流体力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989
- 2 方丁酉. 两相流动力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988
- 3 Thomas P D. Proceeding of A IAA Fifty Computational Fluid Dynamics Conference A IAA 81- 0996 1981
- 4 武晓松, 吴国钊. 曲线网格自动生成中的源项计算方法. 见: 第六届全国流体力学会议论文集, 1992