多态关联系统结构特性分析*

夏胜平　谢红卫

(国防科技大学自动控制系　长沙　410073)

摘　要　可靠性分析中,系统的结构函数有两方面的作用,一方面是结合部件可靠度求得系统的可靠度,另一方面是由结构函数分析系统的结构特性。本文通过构造结构函数的差分运算,从系统的结构稳定性、状态吸收能力和结构重要度三个方面对后者进行了讨论。

关键词　多态关联系统,可靠性,结构函数,差分,结构稳定性,状态吸收能力,结构重要度

分类号　TP202 1

Analysis on Structure Properties of Multistate Coherent System

Xia Shengping　Xie Hongwei

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha 410073)

Abstract　In the analysis of reliability, the system structure function is useful in two aspects. On one hand, it is used to calculate the system reliability. On the other hand, it is used to analyze the system structure properties. In this paper, the difference of structure function is constructed, and then the later aspect is studied in three respects: system structure stability, system state absorbability and structure importance.

Key words　multistate coherent system, reliability, structure function, difference, structure stability, state absorbabilty, structure importance

在以往的可靠性理论研究中,系统和部件都假设为呈现成功、失败两种状态。然而,在许多工程实践中,系统及其部件还可以呈现从最佳工作状态到完全失效工作之间的多种工作状态,称这些中间工作状态为降格成功状态。若对其进行成功、失败的二态分划就过于简单了,甚至可能导致致命的错误。这种现象特别是在交通、电力、电信、航空、航天、计算机、核电站等工程领域中比较常见。二态系统关联结构对这类系统的可靠性分析就不适用了。于是,学术界在70年代提出了多态关联系统[1,2]的概念,越来越多的工程实践的需要也为多态关联系统可靠性理论的发展提供了强大的推动力[3~5]。

众所周知,二态系统可靠性分析中结构函数是系统可靠性逻辑模型的数学形式,而结构函数在可靠性分析中主要有两方面的作用:一方面是由部件的可靠度结合系统结构函数模型求得系统的可靠度;另一方面是由结构函数来研究系统的结构特性,如讨论部件状态的变化对系统状态变化的影响,发现系统的薄弱环节,从而进行重要度分析等等诸项分析工作。

对多态关联系统,其结构函数起着同样重要的作用。第一方面作用的研究已经有了一定的成果,而后者,数学意义上来说就是讨论结构函数的差分,从这个角度对结构函数进行分析尚未有公开发表的研究成果。本文借鉴并推广多值逻辑[4]和布尔代数中差分的概念,构造了多态关联系统结构函数的差分运算,并且对系统结构稳定性和状态吸收能力进行了分析,另外还定义了一组结构重要度指标,这些都在一定程度上反映了系统的结构特性。

* 1997年 9月 29日收稿
第一作者:夏胜平,男,1969年生,博士

基本符号与术语

C	n个相互统计独立部件的集合
$\boldsymbol{S}=\{0,1,2,\cdots,M\}$,	系统的全序状态集，$0<1<2<\cdots<M$
$\boldsymbol{S}_i=\{0,1,2,\cdots,M_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$,	部件的全序状态集，$0<1<2<\cdots<M_i$
$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i$	部件状态集的笛卡尔积，即系统的状态空间
$\varphi: \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i\to \boldsymbol{S}$,	为一满映射，是多态系统结构函数，记为 $\varphi(X)$

$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i$, $x_i,y_i\in S_i$

$(\cdot_i,\boldsymbol{X})=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},\cdot_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i$

1　多态关联系统及其结构函数的差分运算

定义**1.1**　多态关联系统(MCS: Multistate Coherent System)

设任意的多态系统可以用一个四元组$(C,\varphi,\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i,\boldsymbol{S})$来描述，且满足如下条件：

(1) $\varphi(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\varphi(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{M}$，其中$\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)$, $\boldsymbol{M}=(M_1,M_2,\cdots,M_n)$;

(**2**) $\varphi(\boldsymbol{X})$单调非减，即$\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i$, $x_i\leqslant y_i$, $i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{X})\leqslant\varphi(\boldsymbol{Y})$;

(**3**) $\forall i\in C$, $\forall k_i,l_i\in S_i$, $k_i\neq l_i$, $\exists(\cdot_i,\boldsymbol{X})\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i$, $\varphi(k_i,\boldsymbol{X})\neq\varphi(l_i,\boldsymbol{X})$，称满足这种条件的部件为系统的相关部件;

称这样的多态系统为多态关联系统，记作MCS$\varphi(\boldsymbol{X})$

为了构造结构函数的差分运算，先给出如下的一组基本定义:

定义**1.2**[4]　二元文字算子

(1) 和运算“+”:　$x+y=\max(x,y)$;

(2) 积运算“·”:　$x\cdot y=\min(x,y)$;

设以上x,y为部件i的状态变量，$x,y\in S_i$.

定义**1.3**

$$\varphi(\boldsymbol{X})\text{的 }j\text{-值发生函数}\quad \varphi_j^*(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \varphi(\boldsymbol{X})=j;\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\varphi(\boldsymbol{X})\text{的 }m\text{-水平函数}\quad \varphi_m(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \varphi(\boldsymbol{X})\geqslant m.\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

对多态关联系统，由于工程实践中两个部件同时发生状态变化的概率为高阶无穷小，故我们只考虑单部件状态变化引起系统状态变化的情况，即只对结构函数进行一次差分运算；另外，由于结构函数的单调性，当只考虑部件状态的降级时，系统状态也只可能发生降级变化，因此，有如下的差分运算:

定义**1.4**　偏差分

$$\frac{\partial\varphi(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)}=\begin{cases}1 & \text{when } x_i \text{ changes from } a \text{ to } b,\\ & \varphi(\boldsymbol{X})\quad \text{changes from } j \text{ to } k,\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i(a\to b)}=\begin{cases}1 & \text{when } x_i \text{ changes from } a \text{ to } b,\\ & \varphi_m(\boldsymbol{X})\quad \text{changes from } 1 \text{ to } 0,\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

其中$0\leqslant b<a\leqslant M_i$, $0\leqslant k<j\leqslant M$.

性质**1.1**　由定义2.3和定义2.4有:

$$\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)} = h_j^*(a_i, \boldsymbol{X})\cdot h_k^*(b_i, \boldsymbol{X});$$

$$\frac{\partial h_m}{\partial x_i(a\to b)} = h_m(a_i, \boldsymbol{X})\cdot h_m(b_i, \boldsymbol{X}) = h_m(a_i, \boldsymbol{X}) - h_m(b_i, \boldsymbol{X});$$

$$\frac{\partial h_m}{\partial x_i(a\to b)} = \sum_{j=m}^{M}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)}.$$

性质 1 2　由多态关联系统的关联性条件有

$$\exists(\cdot_i, \boldsymbol{X})\quad s.t.\quad \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to(a-1))}\neq 0$$

定义 1 5　全差分

$$dx_i(a\to b)=\begin{cases}1 & x_i \text{ changes from } a \text{ to } b,\\ 0 & \text{else}\end{cases},$$

$$dh(j\to k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{M_i}\sum_{b=0}^{a-1}\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)}\cdot dx_i(a\to b).$$

2　多态关联系统结构稳定性和状态吸收能力

在上述定义及其性质的基础上, 我们来分析系统结构的稳定性状态的吸收能力:

设 $\mathrm{card}(f(\boldsymbol{X})=1)$表示使得括号中等式成立的向量 $\boldsymbol{X}$ 的个数, 记:

$$n_1(j\to\cdot, i) = \mathrm{card}\Big(\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{a=1}^{M_i}\sum_{b=0}^{a-1}\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)} = 1\Big),$$

$$n_1(\cdot\to k, i) = \mathrm{card}\Big(\sum_{j=k+1}^{M}\sum_{a=1}^{M_i}\sum_{b=0}^{a-1}\frac{\partial h(j\to k)}{\partial x_i(a\to b)} = 1\Big),$$

$$n_1(j\to\cdot) = \mathrm{card}\Big(\sum_{k=0}^{j-1} dh(j\to k) = 1\Big),$$

$$n_1(\cdot\to k) = \mathrm{card}\Big(\sum_{j=k+1}^{M} dh(j\to k) = 1\Big),$$

$$n_1(\cdot\to\cdot) = \mathrm{card}\Big(\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{j-1} dh(j\to k) = 1\Big),$$

则记:

$$I_1(j\to\cdot) = \frac{n_1(j\to\cdot)}{n_1(\cdot\to\cdot)},$$

$$I_1(\cdot\to k) = \frac{n_1(\cdot\to k)}{n_1(\cdot\to\cdot)},$$

$$I_1(j\to\cdot, i) = \frac{n_1(j\to\cdot, i)}{n_1(j\to\cdot)},$$

$$I_1(\cdot\to k, i) = \frac{n_1(\cdot\to k, i)}{n_1(\cdot\to k)},$$

称 $dx_i(a\to b)$为使得系统状态变化的一个诱变因素, 当只有 $dx_i(a\to b)$发生时, 系统状态可能发生变化的状态向量个数称为该诱变因素的因素数, 即 $n_1(\cdot\to\cdot, i, a\to b)$, $h(\boldsymbol{X})$的所有诱变因素的因素数之和即为 $n_1(\cdot\to\cdot)$.

当 $I_1(j\to\cdot)$较大, 即系统由状态 j 发生降级变化的因素较大, 这就是说系统状态 j 是一个不稳定的状态 因此用 $I_1(j\to\cdot)$作为系统结构的稳定性指标, 依此来判断系统状态 j 的稳定程度; 另外, 我们用 $I_1(\cdot\to k)$表示系统状态 k 的吸收能力, 当 $I_1(\cdot\to k)$较大, 说明使得系统由状态 k 以上的状态降级变化到状态 k 的因素数较大, 称系统状态 k 有较强的吸收能力.

若 $I_1(\cdot\to k)$较大, $I_1(k\to\cdot)$也较大, 则系统状态 k 是个关键状态. 因为系统状态大于 k 时, 系统状态容易变为 k, 而一旦处于状态 k, 又容易发生状态降级, 所以状态 k 应特别予以关注, 称这样的状态为系

统的极不稳定状态, 这就是说状态 k 是系统的一个薄弱环节。当系统中存在这样的状态时, 可从两方面对系统进行改进: (1)改变系统结构, 使 $I_1(\cdot\to k)$或 $I_1(k\to\cdot)$减小; (2)我们特别指出: $I_1(j\to\cdot, i)$和 $I_1(\cdot\to k, i)$可以作为部件 i的两个结构重要度指标, 它们分别表示部件 i对系统由状态 j 发生降级变化和系统由 k 以上状态变为 k 的贡献。因此, 可以找出 $I_1(j\to\cdot, i)$和 $I_1(\cdot\to k, i)$中较大者, 对相应的部件 i 进行改进, 提高其可靠性, 以便控制部件 i的状态降级变化, 最终改进系统结构。

3 结构重要度分析

重要度[6]是可靠性分析中一个重要的研究内容。根据是否引入部件的状态概率分布, 重要度可分为两类, 一类与状态概率分布有关, 称为概率重要度; 一类仅由系统的可靠性逻辑结构确定, 称为结构重要度。而结构重要度显然是多态关联系统结构特性的度量指标, 因此, 我们在本文中把结构重要度作为一个核心内容来研究。上节中, 已说明了 $I_1(\cdot\to\cdot, i)$和 $I_1(\cdot\to k, i)$可以作为两种结构重要度指标, 为了更准确地反映部件状态的变化对系统状态变化的影响, 基于结构函数的差分运算, 我们进一步定义如下一组部件的结构重要度指标:

定义 **3.1**

$$I_1^{st}(m, i, a, b) = \frac{n_1(m, i, a, b)}{\prod_{l=1, l\neq i}^{n}(M_l+1)},$$

$$I_1^{st}(m, i) = \frac{n_1(m, i)}{\prod_{l=1, l\neq i}^{n}(M_l+1)},$$

$$I_2^{st}(m, i) = \frac{n_2(m, i)}{\prod_{l=1, l\neq i}^{n}(M_l+1)},$$

$$I_3^{st}(m, i) = \frac{n_3(m, i)}{\prod_{l=1, l\neq i}^{n}(M_l+1)},$$

其中

$$n_1(m, i, a, b) = \mathrm{card}\left(\frac{\partial h_m}{\partial x_i(a\to b)} = 1\right),$$

$$n_1(m, i) = \mathrm{card}\left(\sum_{a=1}^{M_i}\frac{\partial h_m}{\partial x_i(a\to(a-1))} = 1\right),$$

$$n_2(m, i) = \mathrm{card}\left(\sum_{b=0}^{M_i-1}\frac{\partial h_m}{\partial x_i(M_i\to b)} = 1\right),$$

$$n_3(m, i) = \mathrm{card}\left(\sum_{a=1}^{M_i}\frac{\partial h_m}{\partial x_i(a\to 0)} = 1\right).$$

性质 **3.1** $$I_1^{st}(m, i, a, b) = \sum_{t=b+1}^{a} I_1^{st}(m, i, t, t-1)$$

推论 **3.1** $$I_1^{st}(m, i, M_i, b) = \sum_{t=b+1}^{M_i} I_1^{st}(m, i, t, t-1);$$

$$I_1^{st}(m, i, a, 0) = \sum_{t=1}^{a} I_1^{st}(m, i, t, t-1).$$

推论 **3.2** $$I_1^{st}(m, i) = \sum_{t=1}^{M_i} I_1^{st}(m, i, t, t-1);$$

$$I_2^{st}(m, i) = \sum_{b=0}^{M_i-1} I_1^{st}(m, i, M_i, b);$$

$$I_3^{st}(m, i) = \sum_{a=1}^{M_i} I_1^{st}(m, i, a, 0).$$

定理 3.1 $I_1^{st}(m, i, a, b) = h_m(a_i, P) - h_m(b_i, P)$,

其中 $P = (P_1, P_2, \cdots, P_n), P_i = (P_{i0}, P_{i1}, \cdots, P_{iM_i}) = (\frac{1}{M_i+1}, \frac{1}{M_i+1}, \cdots, \frac{1}{M_i+1})$,

$h_m(\cdot_i, P) = E\{I_m(\cdot_i, X)\}, h_m(P) = E\{I_m(X)\}$.

定理证明可参考二态可靠性分析中类似的结构重要度和概率重要度关系定理的证明[7]. 综上所述, 若求得全部 $I_1^{st}(m, i, t, t-1)$, 则其余各重要度指标可由性质 3.1 推论 3.1、3.2求得. 而由定理 3.1, 结构重要度的计算转化为可靠度的计算, 这样问题就简单多了. 因此, 以上定义的结构重要度在操作上是可行的.

另外, 这些重要度的物理意义也是很明确的, 其中以 $I_1^{st}(m, i)$、$I_2^{st}(m, i)$、$I_3^{st}(m, i)$最典型. 1) 在工程实践中, 通常可以假定部件是逐级变坏的, 而 $I_1^{st}(m, i)$反映的正是部件的相邻状态变化对系统 m-水平状态变化的影响; 2) 如果要对系统进行改进, 我们往往从部件的改进着手, 若某部件的改进对系统 m-水平的改善影响很大, 则该部件可以作为系统改进的第一选择, $I_2^{st}(m, i)$重要度反映的就是部件 i的改进对系统 m 水平的最大影响程度; 3) $I_3^{st}(m, i)$重要度是假设部件 i所有状态都蜕变成完全失效状态, 求其对系统 m-水平的影响, 它反映的是部件 i的蜕变对系统的最大破坏性. 总的说来, 结构重要度在工程实践中的实用性是较强的.

4 结束语

本文定义了多态关联系统结构函数的差分运算, 它可以用于分析系统的结构特性, 如讨论系统结构稳定性和状态吸收能力以及进行结构重要度分析等. 这种差分运算的数学意义是很容易理解的, 这有助于对其物理意义的深刻理解. 本文根据工程实践的需要, 针对多态关联系统的特性, 定义了稳定性指标、吸收能力衡量指标和一组结构重要度指标, 从而可以更全面地对多态关联系统进行可靠性分析.

参考文献

1 Barlow R E, Wu A S. Coherent systems with multistate components. Math. Oper. Res. 1978, 13: 275~281
2 El-Neweihi E, Proschan F, Sethuraman J. Multistate coherent systems. J. Appl. Prob. 1978, 15: 675~688
3 Alan P W. Multistate Reliability. Ph. D Thesis, 1983
4 Rine D C. Computer Science and MVL theory and applocations. Elsevier slience publishers, 1984
5 Mazars N. Multinary systems and Reliability. Tech. Rep., Com. of Eur. Com., Joint Research Center, 1986
6 Aboumoh A M, Al-cadi M A. On measures of importance for components in multistate coherent systems. Microelectron. Reliab. 1991: 109~122
7 梅启智. 系统可靠性工程基础. 北京: 科学出版社, 1987