

# $\alpha$ 粒子在高温高密度氘氚等离子体中输运和 能量沉积率的有限元计算\*

王尚武 王同权

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

**摘要:**  $\alpha$  粒子在高温高密氘氚等离子体系统中输运时其角密度分布函数满足非定态 Fokker-Planck 方程。本文将一维球对称情况下的 Fokker-Planck 方程在时域离散时分离成速度与坐标方向的两个方程,再对此两个方程中的速度变量作多群化处理,坐标变量(包括运动方向变量)采用有限元方法处理,分别得到了两个有限元方程。通过对两个有限元方程的耦合求解,数值求解了  $\alpha$  粒子角密度分布函数随时间的变化,据此分别计算了  $\alpha$  粒子对背景等离子体中的离子、电子的能量沉积率以及  $\alpha$  粒子对背景等离子体的总能量沉积率随时空的演化。

**关键词** 氘氚等离子体,  $\alpha$  粒子输运, Fokker-Planck 方程, 变量分离, 有限元方法, 能量沉积率

**分类号** O 242. 21, TL329

## The Finite Element Calculation of $\alpha$ Particle Transport and Energy Deposition Rate in High Temperature High Density Deuterium- Tritium Plasma

Wang Shangwu Wang Tongquan

(Department of Applied Physics, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In this paper, the time-dependent Fokker-Planck equation of  $\alpha$  particle angular density distribution function in one-dimensional spherical symmetric D-T plasma is separated to two equations relevant to velocity and ordinates when discreted in time domain. The velocity variable in these two equations is treated by multigroup method, while the ordinate variables are treated by finite element method, thus two finite element equations are obtained. By couple calculation of these two equations, the variation of  $\alpha$  particle angular distribution function vs time is calculated numerically. Based on these results, the time and space distribution of energy deposition rates of  $\alpha$  particles to ions and electrons in plasma are calculated respectively, and the total energy deposition rate of  $\alpha$  particles to background plasma is also obtained.

**Key words** D-T plasma,  $\alpha$  particle transport, Fokker-Planck equation, variable separation, finite element method, energy deposition rate.

### 1 物理方程

在一维球对称氘氚等离子体背景条件下,  $\alpha$  粒子之角密度分布函数  $f(r, \mu, v, t)$  满足如下 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\Omega \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (Af + C \frac{\partial f}{\partial v}) + \frac{B}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu}] + f_s \quad (1)$$

\* 国防科技大学校预研项目资助

1997年8月31日收稿

第一作者: 王尚武, 男, 1962年生, 副教授。

$$\bar{C}_g = - \left( A_{g+1/2} \delta_+ + \frac{C_{g+1/2}}{v_{g+1/2}} \right) \frac{tk}{v_g^3};$$

$$f_{s,g}^k(r, \mu) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{v_g} n_D(r) n_T(r) \sigma_{v-DT} \delta_{gG_0} \quad (G_0 \text{ 是源 } \alpha \text{ 粒子所处能群});$$

$$v_g^3 = \frac{1}{3} (v_{g+1/2}^3 - v_{g-1/2}^3);$$

$0 < \delta_+, \delta_- < 1$  为权重因子, 一般取  $\delta_+ = \delta_- = 1/2$ 。

将  $r \in [0, R]$  用  $r_n (n = 0, 1, 2, \dots, N)$  共  $N + 1$  个分点, 将  $\mu \in [-1, +1]$  用  $\mu_m (m = 0, 1, 2, \dots, M)$  共  $M + 1$  个分点把  $(r, \mu)$  平面划分为  $E = M \times N$  个单元,  $n_0 = (M + 1) \times (N + 1)$  个节点, 其中第  $e$  个单元为  $[r_{n-1}, r_n] \times [\mu_{m-1}, \mu_m]$ 。

设单元  $e$  上 4 个节点 (1, 2, 3, 4) 处的分布函数值为  $(f_1^e, f_2^e, f_3^e, f_4^e)$ , 则单元  $e$  内任一点  $(r, \mu)$  处的分布函数  $f(r, \mu)$  可用这 4 个节点处的函数值插值表示:

$$f(r, \mu) = \tilde{M}^T \mathbf{f}^e, \quad (\text{当 } (r, \mu) \text{ 单元 } e \text{ 时})$$

其中 
$$\tilde{M}^T = \frac{1}{r_n - \mu_m} [c_1 d_1, c_2 d_1, c_2 d_2, c_1 d_2]$$

$$\mathbf{f}^e = (f_1^e, f_2^e, f_3^e, f_4^e)^T$$

而  $c_1 = \mu_m - \mu, c_2 = \mu - \mu_{m-1}, d_1 = r_n - r, d_2 = r - r_{n-1}, r_n = r_n - r_{n-1}, \mu_m = \mu_m - \mu_{m-1}$ , 从而得到单元  $e$  的两个方程。

利用 Galerkin 方法, 分别用  $M$  乘单元  $e$  内的两个方程后, 再作积分  $\int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 2\pi d\mu$ , 可得以下二个有限元方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum \tilde{m}_1^e (A_g f_{g-1}^{e,*} + B_g f_g^{e,*} + C_g f_{g+1}^{e,*}) &= \sum \tilde{m}_1^e (f_g^{e,k} + f_{s,g}^{e,k} - tk) \end{aligned} \right. \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum \left[ \tilde{m}_1^e + v_g - tk (\tilde{m}_2^e + \tilde{m}_3^e) - \frac{B_g}{v_g^2} \frac{tk}{m_4^e} \right] f_g^{e,k+1} &= \sum \tilde{m}_1^e f_g^{e,*} \end{aligned} \right. \quad (6b)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{m}_1^e &= 2\pi \int_e d\mu \int_e r^2 dr \tilde{M} \tilde{M}^T, \quad \tilde{m}_2^e = 2\pi \int_e d\mu \int_e r^2 dr \tilde{M} \mu \frac{\partial \tilde{M}^T}{\partial r} \\ \tilde{m}_3^e &= 2\pi \int_e d\mu \int_e r^2 dr \tilde{M} \left[ \frac{1-\mu^2}{r} \right] \frac{\partial \tilde{M}^T}{\partial \mu}, \quad \tilde{m}_4^e = 2\pi \int_e d\mu \int_e r^2 dr \tilde{M} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial \tilde{M}^T}{\partial \mu} \right] \end{aligned} \right.$$

方程 (6a) 经总体合成后, 相当于对每一个  $(r, \mu)$  平面上的网格节点  $i$ , 解一次方程组:

$$\begin{aligned} \bar{A}_g f_{g-1}^*(i) + B_g f_g^*(i) + \bar{C}_g f_{g+1}^*(i) &= f_g^k(i) + f_{s,g}^k(i) - tk \\ (g = 1, 2, \dots, G; i = 1, 2, \dots, n_0) \end{aligned} \quad (7a)$$

其中:  $f_{s,g}^k(i) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{v_g} n_D(i) n_T(i) \sigma_{v-DT} \delta_{gG_0}$  ( $G_0$  是源  $\alpha$  粒子所在能群)。对每个固定的网格节点  $i$ , 对  $g = 1, 2, \dots, G$ , (7a) 实际上是由  $G$  个方程组成的一个线性代数方程组。利用能量边界条件

$$f_g^*(i) \big|_{g=0} = f_g^*(i) \big|_{g=G+1} = 0$$

此线性代数方程组之系数矩阵为一三对角方阵, 用追赶法解此三对角方程组是十分有效的。

方程 (6b) 经总体合成后变成  $n_0$  阶线性代数方程组:

$$[\tilde{D}_g]_{n_0 \times n_0} [f_g^{k+1}]_{n_0 \times 1} = [\tilde{q}_g]_{n_0 \times 1} \quad (g = 1, 2, \dots, G) \quad (7b)$$

其中

$$\begin{aligned} [D_g]_{n_0 \times n_0} &= \sum_e \left[ \tilde{m}_1^e + v_g - tk (\tilde{m}_2^e + \tilde{m}_3^e) - \frac{B_g}{v_g^2} \frac{tk}{m_4^e} \right] \\ [\tilde{q}_g]_{n_0 \times 1} &= \sum_e \tilde{m}_1^e f_g^{e,*} \end{aligned}$$

利用定解条件, 根据分布函数之初值  $f_g^k(i) \big|_{k=0} = 0$  和源分布  $f_{s,g}^k(i) - tk$ , 对每个节点  $i$ , 用追赶法求解三对角方程组 (7a), 得出  $f_g^*(i)$  ( $g = 1, 2, \dots, G; i = 1, 2, \dots, n_0$ )。然后, 将  $f_g^*(i)$  代入 (7b) 右边, 求出  $[\tilde{q}_g]_{n_0 \times 1}$ , 对每一能群  $g$ , 用高斯消元法求解出  $f_g^{k+1}(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n_0; g = 1, 2, \dots, G$ )。以此作为下一时间步的初值往下计算, 一直求出任意时刻  $t_{k+1}$  的  $f_g^{k+1}(i)$ 。据此, 可以进行有关物理量的数值计算。

其中:  $v$  为  $\alpha$  粒子之速率;  $\Omega$  为  $\alpha$  粒子之运动方向的单位矢量,  $\mu = \Omega \cdot e$ ,  $f^s(r, \mu, v, t) = \frac{1}{4\pi v^2} n_D n_T \sigma_{v-DT} \delta(v - v_0)$  为  $\alpha$  粒子源项(其中  $v_0$  为源  $\alpha$  粒子之速率),  $f_s$  满足

$$f_s v^2 dv 2\pi d\mu = n_D n_T \sigma_{v-DT}$$

而

$$\begin{cases} A(v) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\beta=1}^3 n_\beta \Gamma_\beta \frac{m_\alpha}{m_\beta} \left[ \int_0^{\theta_\beta} e^{-s^2} ds - \theta_\beta e^{-\theta_\beta^2} \right] \\ B(v) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\beta=1}^3 n_\beta \Gamma_\beta \frac{2kT_\beta}{m_\beta} \frac{1}{4v^3} \left[ (2\theta_\beta - 1) \int_0^{\theta_\beta} e^{-s^2} ds + \theta_\beta e^{-\theta_\beta^2} \right] \\ C(v) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\beta=1}^3 n_\beta \Gamma_\beta \frac{kT_\beta}{m_\beta v} \left[ \int_0^{\theta_\beta} e^{-s^2} ds - \theta_\beta e^{-\theta_\beta^2} \right] \\ \Gamma_\beta = \frac{4\pi(Z_\alpha Z_\beta)^2 e^4 \ln \Lambda}{m^2}, \quad \theta_\beta = \frac{m_\beta v^2}{2kT_\beta} \end{cases}$$

这里  $n_\beta, m_\beta, T_\beta, Z_\beta (\beta = 1, 2, 3)$  分别为  $D^+, T^+, e^-$  之数密度、质量、温度及电荷数;

$\ln \Lambda$  为库仑对数,  $\ln \Lambda = \ln \frac{1}{\sin \frac{\chi_m}{2}}$ ,  $\chi_m$  为最小散射角。

方程(1)之定解条件为:

$$\begin{cases} f(r, v, \mu, t) |_{t=0} = 0 \\ f(r=0, v, \mu, t) = f(r=0, v, -\mu, t), (\mu > 0) \\ f(r=R, v, \mu, t) |_{\mu=0} = 0, (R \text{ 为系统半径}) \\ f(r, v, \mu, t) |_{v < v_L} = f(r, v, \mu, t) |_{v > v_H} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

## 2 Fokker-Planck 方程的数值解法

方程(1)可简记为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V(f) + R(f) + f_s \quad (3)$$

其中 
$$\begin{cases} V(f) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (A f + C \frac{\partial f}{\partial v}) \\ R(f) = -v \Omega \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu}] \end{cases}$$

用  $t_k (k = 0, 1, 2, \dots)$  将  $t$  离散化, 将方程(3)对时间变量离散后分离为以下两个方程:

$$\frac{f^* - f^k}{t_k} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (A f^* + C \frac{\partial f^*}{\partial v}) + f_s^k \quad (4a)$$

$$\frac{f^{k+1} - f^*}{t_k} + v \Omega \cdot \frac{\partial f^{k+1}}{\partial r} = \frac{B}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \frac{\partial f^{k+1}}{\partial \mu}] \quad (4b)$$

将  $\alpha$  粒子能量  $\epsilon \in [\epsilon, \epsilon^H]$  均匀地划分为  $G$  群, 其中第  $g$  群的速度范围为  $[v_{g-1/2}, v_{g+1/2}] (g = 1, 2, \dots, G)$ , 用算子  $L = \int_{v_{g-1/2}}^{v_{g+1/2}} v^2 dv$  作用于方程(4a), (4b) 两边, 分别得到:

$$\bar{A}_g f_{g-1}^*(r, \mu) + B_g f_g^*(r, \mu) + \bar{C}_g f_{g+1}^*(r, \mu) = f_g^k(r, \mu) + f_{s,g}^k(r, \mu) \quad t_k \quad (5a)$$

$$f_g^{k+1}(r, \mu) + v_g t_k \Omega \cdot \frac{\partial f_g^{k+1}}{\partial r} - \frac{B_g}{v_g^2} t_k \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \frac{\partial f_g^{k+1}}{\partial \mu}] = f_g^*(r, \mu) \quad (5b)$$

其中 
$$A_g = (A_{g-1/2}(1 - \delta_-) - \frac{C_{g-1/2}}{v_{g-1/2}}) \frac{t_k}{v_g^3};$$

$$B_g = (\frac{C_{g+1/2}}{v_{g+1/2}} + \frac{C_{g-1/2}}{v_{g-1/2}} + A_{g-1/2} \delta_- - A_{g+1/2}(1 - \delta_+)) \frac{t_k}{v_g^3} + 1;$$

### 3 α粒子在背景等离子体中单位体积的能量沉积率

仅考虑α粒子与背景粒子间的库仑碰撞导致的能量损失,则可导出一个能量为ε(相应的速率为v)的α粒子与β类粒子碰撞导致的平均能量损失率为<sup>[7]</sup>:

$$-\frac{d\epsilon}{dt} \beta = \frac{2}{\pi} n \beta \Gamma \beta \frac{m^2}{m \beta v} \left[ \int_0^{\theta_\beta} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{m + m \beta}{m} \theta_\beta e^{-\theta_\beta^2} \right]$$

于是, t时刻单位时间内, r处单位体积内α粒子对β类粒子的能量转移为:

$$\dot{W}_\beta(r, t) = \int_{-1}^1 2\pi d\mu \int_0^1 v^2 dv f(r, v, \mu, t) \left| \frac{d\epsilon}{dt} \beta \right|$$

此式可化为离散形式,进而求出能量沉积率随时空的变化。

t时刻单位时间内, r处单位体积内α粒子对背景等离子体的总能量沉积率为:

$$\dot{W}(r, t) = \sum_\beta \dot{W}_\beta(r, t)$$

### 4 计算结果与分析

#### (1) 计算模型及参数选择

取等离子体质量密度为ρ= 1000g/cm<sup>3</sup>, T<sub>i</sub>= T<sub>e</sub>= 50keV, 系统半径R= 1.55×10<sup>-3</sup>cm, n<sub>D</sub>= n<sub>T</sub>= n<sub>e</sub>/2= n, 而n= 1.204×10<sup>26</sup>/cm<sup>3</sup>。在(0, 0.1R)上存在均匀分布的α粒子源(由DT反应产生), 将ε [ε<sub>L</sub>, ε<sub>H</sub>]均匀分成95群, r [0, R]分成40个区间(均匀), μ [-1, +1]均匀分成7个区间, 时间步长t<sub>k</sub>= 0.25×10<sup>-7</sup>μs, lnΛ= 9.0, σ<sub>v</sub>参数取自文献[8]、[9]。t<sub>0</sub>= R/v<sub>0</sub>(v<sub>0</sub>系球心产生的源α粒子速率)

#### (2) 计算结果

图1~图4所示为α粒子分别对离子(D<sup>+</sup>, T<sup>+</sup>)和电子(e<sup>-</sup>)的能量沉积率在t/t<sub>0</sub>= 0.2, 0.5, 1.2, 2.1时刻随空间坐标r的变化情况。图中横坐标为r/R, 纵坐标为4πr<sup>2</sup>·Ẇ<sub>β</sub>(r, t)·R/Q<sub>E</sub>(β=i, e), Q<sub>E</sub>为整个α粒子源区单位时间内放出的α粒子能量。从时间演化情况看, 随着时间的增长, α粒子可有效地将其能量转移给离子, 这对于热核反应来讲是十分有利的。此结果与文献[3~5]的结果是一致的。

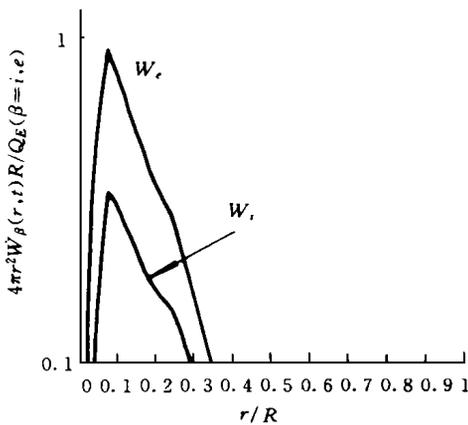


图1 t/t<sub>0</sub>= 0.2时刻α粒子对背景等离子体中的离子、电子的能量沉积率随空间的变化

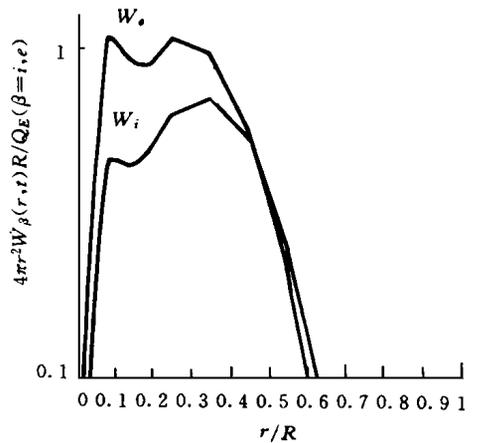


图2 t/t<sub>0</sub>= 0.5时刻α粒子对背景等离子体中的离子、电子的能量沉积率随空间的变化

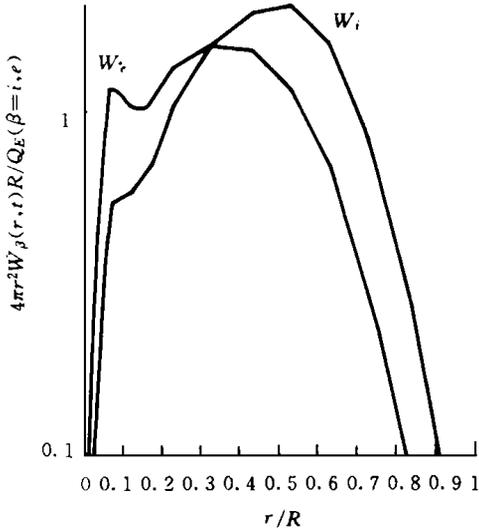


图3  $t/t_0 = 1.2$ 时刻  $\alpha$  粒子对背景等离子体中的离子、电子的能量沉积率随空间的变化

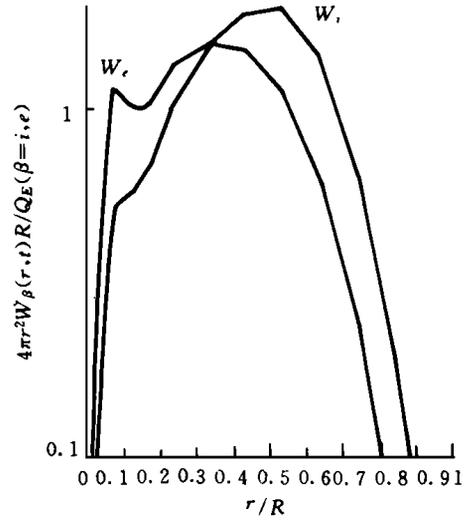


图4  $t/t_0 = 2.1$ 时刻  $\alpha$  粒子对背景等离子体中的离子、电子的能量沉积率随空间的变化

## 参考文献

- 1 Chang J S, et al. J. Com. Phys. 1970(6): 1 ~ 16
- 2 Corman E G, et al. Nucl. Fusion. 1975(15): 377 ~ 386
- 3 Tsuji H, et al. Nucl. Fusion. 1976(16): 287- 293
- 4 Tran T M, et al. J. Nucl. Sci. Eng. 1981(79): 269 ~ 277
- 5 孙永盛等. 计算物理. 1985, 2(3): 264
- 6 黄祖洽等. 输运理论. 北京: 科学出版社. 1987: 308 ~ 317
- 7 宫本健郎. 热核聚变等离子体物理学. 金尚宪译, 北京: 科学出版社. 1981: 77 ~ 82
- 8 Hively L M. Nucl. Fusion. 1977(7): 873 ~ 876
- 9 Dolan T J. Fusion Research. Pergamon Press Inc. 1982(30)
- 10 张利发等. 高科技研究中的数值计算. 长沙: 国防科技大学出版社. 1995: 187