广生灭过程的积分型随机泛函*

唐有荣
(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

刘再明 候振挺
(长沙铁道学院科研所 长沙 410075)

摘 要 讨论了广生灭过程的积分型随机泛函的概率分布，给出了分布的拉氏变换所满足的差分方程，且求出了它们的解

关键词 广生灭过程，积分型随机泛函，首达时间
分类号 O211.6

The Integral Random Functional of the Generalized Birth And Death Process

Tang Yourong
(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)
Lu Zaiming Hou Zenting
(Research Department, Changsha Railway University, Changsha, 410075)

Abstract In this paper, the probability distribution of the integral random functional of the gerneralized birth and death processes is discussed, while their Laplace transform proper difference equation and their solution are offered.

Key words Generalized birth and death porcesses, integral random functional, first arrive time

1 引言

设 $X=\{x_t(w),t\geq 0\}$ 是定义在概率空间(Ω,F,P)上右连续齐次马尔柯夫过程,具有标准转移概率矩阵$\{p_{ij}(t)\},i,j\in E=\{0,1,2\cdots\}$,称 X 为广生灭过程,如果它的密度矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 具有以下形式:

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{10} & -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & -c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & -c_n & b_n & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中:

$$\left.\begin{array}{l} c_0=b_0,b_i>0(i\geq 0),a_{ij}\geq 0(0\leq j<i) \\ \sum_{j=0}^{i-1}a_{ij}>0,c_i=\sum_{j=0}^{i-1}a_{ij}+b_i\quad(i\geq 1) \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

为方便起见,补充定义 $a_{00}=0$,称矩阵(1.1)为广生灭矩阵。

显然$\{p_{ij}(t)\}$为广生灭过程转 移概率函数的充要条件为: 当 $t\to 0$时

* 1997年12月5日收稿
第一作者: 唐有荣，男，1966年生，讲师

$$p_{ij}(t)=\begin{cases} b_i t+o(t) & j=i+1 \\ a_{ij}t+o(t) & 0\le j<i \\ 1-c_i t+o(t) & j=i \\ o(t) & \text{其它} \end{cases} \tag{1.3}$$

对于(1.1)的 Q 矩阵,引进如下的数字特征:

首先,设

$$a_i^{(k)}=\sum_{j=0}^{k} a_{ij}\quad (i\ge 1,0\le k<i) \tag{1.4}$$

其次,对于任意的 $m\in E$,定义:

$$\begin{cases} F_m^{(m)}=1 \\ F_k^{(m)}=\dfrac{1}{b_k}\sum_{i=1}^{k-m} a_k^{(k-i)}F_{k-i}^{(m)}=\dfrac{1}{b_k}\sum_{i=m}^{k-1} a_k^{(i)}F_i^{(m)} \qquad (k>m) \end{cases} \tag{1.5}$$

$$Z_{(i,j)}^{(m)}=\sum_{k=i}^{j-1} F_k^{(m)}\qquad (j>i\ge m) \tag{1.6}$$

$$Z_{(i)}^{(m)}=\lim_{j\to\infty} Z_{(i,j)}^{(m)}=\sum_{k=i}^{\infty} F_k^{(m)}\qquad (i\ge m) \tag{1.7}$$

$$m_k=\sum_{m=0}^{k} F_k^{(m)}/b_m\qquad (k\ge 0) \tag{1.8}$$

$$R=\sum_{k=0}^{\infty} m_k \tag{1.9}$$

设 A 是 E 的一个非空子集,定义随机变量

$$\eta_A\equiv\eta_A(\omega)=\begin{cases} \inf(t:t>0,x_t(\omega)\in A) & \text{如右边集合非空} \\ \infty & \text{否则} \end{cases} \tag{1.10}$$

把 η_A 叫做首达 A 的时间,特别当 $A=\{i\}$ 时,用 η_i 表示 $\eta_{\{i\}}$。

显然有 $\eta_i(\omega)$ 以概率1(P 或 P_k)存在极限

$$\eta(\omega)=\lim_{i\to\infty}\eta_i(\omega)$$

其中 P_k 表示 $X_0(\omega)=k$ 时的条件概率,即:$P_k(A)=P(A\mid X_0=k)\qquad A\in F$

文献[1]讨论了以上数字特征的概率意义,得到了广生灭过程唯一的充要条件是 $R=\infty$。

2 广生灭过程的积分型随机泛函

设 $\eta_n(\omega)$ 表示首达状态 n 的时间,$V(i)\ge 0$,且 $V(i)\ne 0$ 是定义在状态空间 E 上的函数,定义随机变量

$$\xi^{(n)}(\omega)\equiv\int_0^{\eta_n(\omega)} V(x_t(\omega))\,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

$$\xi(\omega)\equiv\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\eta(\omega)} V(x_t(\omega))\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

$$\varphi_{kn}(\lambda)\equiv E_k e^{-\lambda\xi^{(n)}}=\int_0^{\infty} e^{\lambda x}\,\mathrm{d}F_{kn}(x) \tag{2.3}$$

仿文献[2] §5.1的基本引理的证明有以下定理。

定理2.1 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 满足差分方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki}\varphi_{in}(\lambda)-c_k\varphi_{kn}(\lambda)+b_k\varphi_{k+1\,n}(\lambda)-\lambda V(k)\varphi_{kn}(\lambda)=0\quad (k\ne n) & (2.4) \\ \varphi_{kn}(\lambda)=1 \qquad (K=n) & (2.5) \end{cases}$$

当 $k\le n$ 时,文献[1]给出了(2.4),(2.5)的解,现求(2.4)、(2.5)在 $k>n$ 时的解。

为了求解(2.4)、(2.5),我们引进一个新的半马氏过程 $\bar{X}=\{\bar{X}(t,w),t\geq 0\}$,其半马氏矩阵$\{\bar{p}_{ij}(t)\}$,$i,j\in E=\{0,1,2,\cdots\}$,其中,

$$\bar{p}_{ij}(t)=p_{ij}(1-e^{-\frac{c_i}{V(i)}t})$$

p_{ij}为马氏过程 X 的跳跃链的转移概率,$P(\theta\leq t)=1-e^{-\frac{c_i}{V(i)}t}$,$\theta$ 为 $\bar{X}$ 在状态 i 的逗留时间,即若 θ_i 为 X 在状态 i 的逗留时间,则 $\theta\equiv V(i)\theta$ 为 $\bar{X}$ 在状态 i 的逗留时间。若 $V(i)=0$约定$\frac{c_i}{V(i)}=\infty$.

因此,$\bar{X}$ 具有以下性质:

(1) $\bar{X}$ 在 i 的逗留时间不超过 t 的概率分布为$1-e^{-\frac{c_i}{V(i)}}$,这表明将 X 的 i—区间的长乘以 $V(i)$后,此乘积的分布恰为 $\bar{X}$ 的 i—区间长的分布(在开始分布集中在 i 的条件下),

(2) 自 i 出发,经一次跳跃后专移到 j 的概率,对 X、$\bar{X}$ 都同为$\frac{q_{ij}}{q_i}$(其中$q_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & (0\leq j<i)\\ b_i & (j=i+1)\end{cases}$ $q_i=c_i$).

因此,对 X 在第一个飞跃点以前的轨道,如将每一 i-区间伸长(或缩短) $V(i)$ 倍后($i\in E$),可以看成为 $\bar{X}$ 在第一个飞跃点以前的轨道。令

$$S_k^{(n)}(\omega)=\{t:x(t,\omega)=k,t<\eta_n(\omega)\} \tag{2.6}$$

由于X 的可测性,对每一 ω,$S_k^{(n)}(\omega)$ 是 t 的Lebesgue 可测集,因此 $L[S_k^{(n)}(\omega)]$是随机变量,显然,

$$\xi^{(n)}(\omega)\equiv\int_0^{\eta_n}v(x(t,\omega))\,\mathrm{d}t=\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty}V(k)L[S_k^{(n)}(\omega)]=\eta(\omega) \tag{2.7}$$

其中 η_n 是 $\bar{X}$ 首达 n 的时刻。

由(2.7)知:$\xi^{(n)}=\eta_n$ 与 $V(n)$无关,因此以 $V(n)=1$替换 $\bar{X}$ 的 $V(n)$,仍记为 $\bar{X}$。令

$$\bar{F}_{kn}(t)\equiv P_k(\eta_n\leq t) \tag{2.8}$$

$$\Phi_{kn}(t)\equiv E_ke^{-\lambda\eta_n}=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}\bar{F}_{kn}(t) \tag{2.9}$$

显然有

$$\bar{F}_{kn}(t)=F_{kn}(t)\qquad \Phi_{kn}(t)=\Phi_{kn}(t) \tag{2.10}$$

从而对 X 的 ξ_n 的研究转 化为 $\bar{X}$ 的 η_n 的研究。

引理**2.1** 设 $\bar{\tau}_k$ 为 $\bar{X}$ 的第 k 个 n—区间的长,$\bar{r}_k$ 表示 $\bar{X}$ 第 k 次离开 n 起,首次回到 n 所需时间,则有

(Ⅰ) $\bar{\tau}_k,\bar{r}_k,\bar{\tau}_k+\bar{r}_k$ $(k=1,2,\cdots)$分别是独立同分布的随机变量序列;

(Ⅱ) $\bar{\tau}_k$ 与 $\bar{r}_l$ $(k,l=1,2,\cdots)$相互独立。

证 (Ⅰ)首先证 $\bar{\tau}_k(k=1,2,\cdots)$独立同分布。

设 τ_k 是 X 的第 k 个 n—区间的长,r_k 表示第 k 次离开 n 起,首次回到 n 所需时间

由 $\bar{\tau}_k=\tau_k$ 及 $\tau_k(k=1,2,\cdots)$独立同分布知 $\bar{\tau}_k$ 独立同分布;其次证 $\bar{r}_k$ 独立同分布。设 $\lambda_k(\omega)$表示 X 从 n—区间跳出时的 k 次跳跃点,令

$$\begin{cases}S_{(0,i)}^{(n)}=(t:x(t+\lambda_0(\omega),\omega)=i,0\leq t<\eta_n(\omega))\\ S_{(k,i)}^{(n)}=(t:x(t+\lambda_k(\omega),\omega)=i,0\leq t<\eta_n(\omega))\end{cases}$$

这里约定 $\lambda_0(\omega)=0$ $P-a.e$

由 $L[S_{(k,i)}^{(n)}]$是 t 的 Lebesgue 可测集,因此是随机变量,利用 X 的强马氏性有

$$L[S_{(k,i)}^{(n)}]=L[S_{(0,i)}^{(n)}]\qquad P_n-a.e$$

及得$L[S_{(k,i)}^{(n)}]$ $(k=1,2,\cdots)$是相互独立同分布的随机变量,故由$\sum_{\substack{i=0\\i\neq n}}^{\infty}V(i)\ L[S_{(k,i)}^{(n)}]$知$\bar{r}_k(k=1,2,\cdots)$是独立同分布的随机变量序列。

仿 $\bar{r}_k$ 的证明可得 $\bar{\tau}_k+\bar{r}_k$ 独立同分布。

(Ⅱ) 对于任意 $k>0$, 由 $\bar{\tau}_k=\tau_k, \bar{r}_l=\sum_{\substack{i=0\\i\neq n}}^{\infty}V(i)\quad L[S_{(k,i)}^{(n)}]$ 以及 τ_k 与$[S_{(k,i)}^{(n)}]\,(i=0,1,2,\cdots)$ 独立知 $\bar{\tau}_k$ 与 $\bar{r}_l\quad(k,l=1,2,\cdots)$ 相互独立。

令

$$E_0=(\bar{\tau}_1>t)$$

$$E_m=\left(\sum_{i=0}^{m}(\bar{\tau}_i+\bar{r}_i)\leq t<\sum_{i=0}^{m}(\bar{\tau}_i+\bar{r}_i)+\bar{\tau}_{m+1}\right)\quad(m=1,2,\cdots)$$

显然 $\bar{X}$ 的转移概率 $\bar{p}_{nn}(t)$ 满足

$$\bar{p}_{nn}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}P_n(E_m)\tag{2.11}$$

又设 $F_{\bar{r}_k}(t)\equiv P(\bar{\tau}_k\leq t)$, 则由全概率公式及(2.10)有

$$F_{\bar{r}_k}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{ni}}{c_n}F_{in}(t)+\frac{b_n}{c_n}F_{n+1n}(t)\tag{2.12}$$

又 $F_{\bar{\tau}_k}(t)\equiv P(\bar{\tau}_k\leq t)=1-e^{-c_nt}$, 由引理2.1知 $\bar{\tau}_k+\bar{r}_k$ 的分布函数为 $F_{\bar{\tau}_k}(t)$ 与 $F_{\bar{r}_k}(t)$ 的卷积。记 $F^{(m)}(x)$ 是 $F_{\bar{\tau}_k+\bar{r}_k}(x)$ 的 m 次卷积, 即 $\sum_{i=1}^{m}(\bar{\tau}_i+\bar{r}_i)$ 的分布函数。因此

$$P_n(E_m)=\iint\limits_{\substack{x_1+x_2>t\\x_1\leq t}}\mathrm{d}F^{(m)}(x_1)\,\mathrm{d}F_{\bar{\tau}_{m+2}}(x_2)=\int_0 e^{-c_n(t-x)}\mathrm{d}F^{(m)}(x)\tag{2.13}$$

于是由(2.11)、(2.13)及 $P_n(E_0)=e^{-c_nt}$ 得

$$\bar{p}_{nn}(t)=e^{-c_nt}+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0 e^{-c_n(t-x)}\mathrm{d}F^{(m)}(x)\tag{2.14}$$

当 $\lambda>0$ 时对(2.14)两边取拉氏变换, 并令 $\bar{p}_n(\lambda)\equiv\int_0^{\infty}\bar{p}_{nn}(t)e^{\lambda t}\mathrm{d}t$ 得

$$\bar{p}_n(\lambda)=\frac{1}{\lambda+c_n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+c_n}\left(\frac{c_n}{\lambda+c_n}\right)^m\varphi_{\bar{r}_k}^m(\lambda)$$

即 $\bar{p}_n(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda+c_n[1-\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda)]}$ (其中 $\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda)\equiv\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}F_{\bar{r}_k}(t)$) 从而 $\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda)=\dfrac{\lambda+c_n}{c_n}-\dfrac{1}{c_n\bar{p}_n(\lambda)}$ (2.15)

$$\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda)\equiv\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}F_{\bar{r}_k}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{ni}}{c_n}\varphi_{in}(\lambda)+\frac{b_n}{c_n}\varphi_{n+1n}(\lambda)\tag{2.16}$$

由(2.15)、(2.16)有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{ni}}{c_n}\varphi_{in}(\lambda)+\frac{b_n}{c_n}\varphi_{n+1n}(\lambda)=\frac{\lambda+c_n}{c_n}-\frac{1}{c_n\bar{p}_n(\lambda)}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_{ni}\varphi_{in}(\lambda)+b_n\varphi_{n+1n}(\lambda)=\lambda+c_n-\frac{1}{\bar{p}_n(\lambda)}\tag{2.17}$$

因此由(2.4)、(2.5)(2.17)可唯一求出 ξ_n 的分布的 Laplace 变换 $\varphi_{kn}(\lambda)$. 因此我们有以下定理

定理**2.2** 由(2.4)、(2.5)、(2.17)可唯一解得 ξ_n 的分布函数的拉氏变换 $\varphi_{kn}(\lambda)$。

须注意的是: 由于(2.17)与 $\bar{X}$ 的转移概率函数有关, 从而与 X 的转移概率函数 $p_{nn}(t)$ 有关, 因此(2.17)并不能由 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵唯一决定, 只有当 $R=\infty$ 时, 才由 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵唯一决定。

参考文献

1 张建康. On the generalized birth and death processes. 数学物理学报, 1984. 4(2): 241～259

2 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链. 北京: 科学出版社, 1980