稳定正规环分解定理*

戴清平

(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　提出了稳定正规环的概念；推广了正规环的分解定理；给出了正则局部环整性的一个简单证明；指出了研究正则环的一条新途径。

关键词　稳定环，分解定理

分类号　O153.3

Theorem of Decomposition on Stable Normal Ring

Dai Qingping

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　The definition of stable normal ring is presented. The decomposition of normal ring is extended. Throrgh the result, we have obtained simple proof of the property of regular local ring. We also give a researching method for regular ring.

Key words　stable ring, decomposition theorem

设 A 是含单位的交换诺特环。我们用 $\mathrm{spec}(A)$ 表示环 A 的素谱对于 $p\in\mathrm{spec}(A)$，A_p 表示 A 在素理理想 p 处的局部化，$ht(p)$ 表示 p 的高度。在文献[1]中给出了下面两组条件，对于整数 $k=0,1,2,\cdots$，考虑：

(S_k) $\mathrm{depth}(A_p)\geq\inf(k,ht(p))$，$\forall p\in\mathrm{spec}(A)$；

(R_k) 如果 $p\in\mathrm{spec}(A)$ 有 $ht(p)\leq k$，那么 A_p 是正则环。

我们把文献[1]的几个结论陈述如下：

A 是 $C-M$ 环 $\Leftrightarrow A$ 适合所有 (S_k)；

A 是正规环 $\Leftrightarrow A$ 适合 (S_2) 和 (R_1)；

A 是既约环 $\Leftrightarrow A$ 适合 (S_1) 和 (R_0)；

A 是正则环 $\Leftrightarrow A$ 适合所有 (S_k) 和 (R_k)。

按古典理论，正规环是有限个正规整环的直和。显然正则环是正规环，因此正则环能分解为有限个正规整环的直和，下面的结论说明这些正规整环是正则环。

定义1　环 A 具有某一特征性质当且仅当对任意 $p\in\mathrm{spec}(A)$，A_p 具有该特征性质。我们称这种环为稳定环。

定义2　满足 (S_2) 和 (R_1) 的稳定环称为稳定正规环。

定理　稳定正规环是有限个稳定正规整环的直和。

证明　由正规环分解定理有 $A=A_1\times\cdots\times A_n$，其中 A_i 是正规整环。下面证明 A_i 是具有与 A 相同特征性质的稳定环。

注意到 $p\in\mathrm{spec}(A)$，必有某 $p_i\in\mathrm{spec}(A_i)$ 使 $p=A_1\times\cdots\times A_{i-1}\times p_i\times A_{i+1}\times\cdots\times A_n$，并且这是一一对应关系。在 A 中设 $S=A\setminus P$，那么 $S=A_1\times A_2\times\cdots\times A_{i-1}\times(A_i\setminus P_i)\times A_{i+1}\times\cdots\times A_n$。在 A_i 中设 $Q=A_i$

---

* 国防科技大学试验技术项目资助
1997年9月8日收稿
戴清平，男，1966年生，讲师

$\setminus p_i$, 因此 $A_p = S^{-1}A \cong Q^{-1}A_i = (A_i)_{p_i}$。这就完成了定理的证明。

考虑到局部环的不可分解性我们有:

推论1 稳定正规局部环是整环。

因此我们非常简单地证明了正则局部环的一个重要性质: 正则局部环是整环。而文献上一般都用高深的同调方法或分次方法证明之。稳定环的例子很多, 如正则环、$C-M$ 环、Gorenstein 环。稳定正规环最典型的例子是正则环。

推论2 正则环是有限个正则整环的直和; 满足(R_1)的 $C-M$ 环是有限个 $C-M$ 整环的直和; 满足(R_1)的 Gorenstein 环是有限个 Gorenstein 整环的直和。

由此可见正则环研究只要讨论正则整环。当然正则整环的研究不是一件轻松的事, 即使 $\dim A = 2$ 也没有完全弄清楚。如果 $\mathrm{gl.}\dim A = d < +\infty$, 则

$$A = (A_{01} \oplus \cdots \oplus A_{0t_0}) \oplus (A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{1t_1}) \oplus \cdots \oplus (A_{d1} \oplus \cdots \oplus A_{dt_d}),$$

其中 A_{0i} 为域, A_{ij} 为 Dedekind 整环, 当然某些项可能为0, 此时从分解项中去掉它们。这样我们可以给出很多正则环的例子, 如 $Z \oplus k[x]$。下面我们再给出两个正则整环的例子。

例1 无穷维正则整环。

$A = k[x_1, \cdots, x_n \cdots]$, 设$\{m_n\}$为递增正整数列, $m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$(对$\forall i > 1$), $p_i = (x_{m_i+1}, \cdots, x_{m_{i+1}})$, $S = A \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} p_i)$, 由[3]知 $S^{-1}A$ 是诺特环, 且 $\dim S^{-1}A = +\infty$, $S^{-1}A$ 的极大理想形如 $S^{-1}P_i$, 由于 $(S^{-1}A)_{S^{-1}p_i}$ 是正则局部环, 从而 $S^{-1}A$ 是无穷维正则环。下面说明$(S^{-1}A)_{S^{-1}p_i}$为正则局部环。

不失一般性设 $P_1 = (x_1, \cdots, x_n)$, $\bar{K} = K(x_{n+1}, \cdots\cdots)$为分式域。经过简单计算知$(S^{-1}A)_{S^{-1}p_1} \cong A_{P_1} \cong \bar{k}[x_1, \cdots, x_n]_{(x_1, \cdots x_n)}$, 它显然是正则局部环。

例2 不具有纯维数(极大理想的等高性)的正则整环。

设(A, m, k)是正则局部环, $\dim A > 0$。$B = A[x_1, \cdots, x_n]$是 A 上的 n 元多项式环, 则 B 为正则整环且 $\mathrm{gl}\cdot\dim B = n + \mathrm{gl}\cdot\dim A < +\infty$。下面证明 B 不具有纯维数。

设 $q_1, q_2 \in \mathrm{spec}(A)$, $q_1 \subset q_2$, $q_1 \neq q_2$。$A \xrightarrow{i} A[x_1, \cdots, x_n]$, i 忠实平坦。由[1]$P_{79}Th19$, $\forall Q \in \mathrm{spec}(B)$, $Q \cap A = q$, 有 $ht(Q) = ht(q) + ht(Q/qB)$或写为 $\dim B_Q = \dim A_q + \dim(B_Q \otimes k(q))$, 但 $\dim(B_Q \otimes k(q)) = \dim(k(q)[x_1, \cdots x_n]) = n$, 分别在 q_1, q_2 的纤维中取极大理想 Q_1, Q_2, 对应地取 $\mathrm{spec}(B)$中的极大理想 Q_1, Q_2, 使得 $Q_1 \cap A = q_1$, $Q_2 \cap A = q_2$。此时有:

$$ht(Q_2) = ht(q_2) + n > ht(q_1) + n = ht(Q_1).$$

参考文献

1 Matsumura H. Commutative Algebra. 2nd ed. The Benjamin, Inc, 1980

2 Rotman J. An Introduction to Homological Algebra. Pure Appl. Math, Academic Press, New York, 1979

3 Atiyah M F. And Macdonald I G Introduction to Commutative Algebra. Addison Wesley, Reading Mass, ete, 1969

4 Strooker J R. Homological Question in Local Algebra. Lond. Math. Soc. LNS 145, 1991