

低阶高精度单元的发展*

任钧国 熊龙飞

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 综述了四节点等参单元存在的问题, 以及提高其精度的途径, 并对这些方法略做评述, 且探讨了发展高精度单元的方法。

关键词 低阶, 高精度, 等参单元

分类号 V 414

Development of Low Order Element with High Accuracy

Ren Junguo Xiong Longfei

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha 410073)

Abstract In this paper problems which exist in 4-node isoparametric element and their methods of improving the accuracy are summarized. The authors give brief review to these methods and discuss the approach to developing high accuracy element.

Key words low order, high accuracy, isoparametric element

四节点等参单元最初由 Taig^[1,2]提出, 由 Irons^[3]加以推广完善, 对有限元的发展起了很大的推动作用, 记这种单元为 Q_4 单元, Q_4 单元具有形式简单, 在精细网格下收敛到正确解, 适合于各类问题 (例如非线性问题), 形成单元矩阵时计算量少等优点, 因此在工程计算中得到广泛应用。然而这类单元对于弯曲问题, 性能不理想, 对于不可压缩材料平面应变, 产生“闭锁”现象。另外对于粗网格, 或者长宽比很大的单元, 精度不高, 对于单元的几何形状敏感性很大。例如一端固定一端受弯矩作用的悬臂梁, 如图 1 分成两单元计算 A 点垂直位移 W , 与同一问题精确解比较, 其误差与反映单元几何形状的参数 a/l 的关系曲线见图中 Q_4 曲线, 可见对于弯曲问题刚度相当大。什么原因造成这种现象呢? 我们来分析一典型的矩形单元, 如图 2 每节点两自由度, 共 8 个自由度。分析单元的特征变形有 8 种, 三个刚体运动 (两个平动、一个转动), 另外还有 5 个变形, 分别为剪切变形, 体积变形, 拉伸变形和两个弯曲变形。与后 5 个变形对应的特征值为^[4]:

$$\lambda_4 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)G, \quad \lambda_{5,6} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 E_1^2 + 4E_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}E_1 + \frac{a}{b}G\right), \quad \lambda_8 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}E_1 + \frac{b}{a}G\right)$$

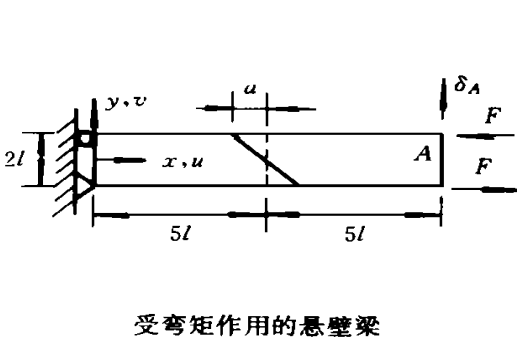
其中 $E = \frac{E}{1-\nu}$ (平面应力), $E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ (平面应变),

$$E_2 = \nu E_1$$

特征值是反映与之对应的变形刚度的度量, 特征值越大, 刚度越大, 越不容易发生这种变形。当泊松比 $\nu \rightarrow 0$ 时, 剪切变形的特征值 λ_4 不会变为无穷大, 因此剪切变形可以发生。而 $\lambda_{5,6}$ 中有一个特征值会趋向于无穷大, 即 λ_5 , 它是阻碍单元体积的变化, $\nu = 0$ 时为不可压缩的, 正确地反映单元刚度。 λ_6 为有限值, 反映在等体积下单元形状的变化。在 $\nu \rightarrow 0$ 时, $\lambda_{7,8} \rightarrow \infty$, 这两种变形也是在等体积下单元形状的

* 1999年5月1日收稿

第一作者: 任钧国, 男, 1946年生, 教授



受弯矩作用的悬臂梁

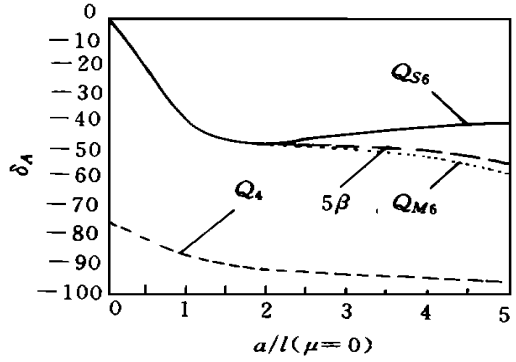


图 1 单元与几何形状的敏感性关系

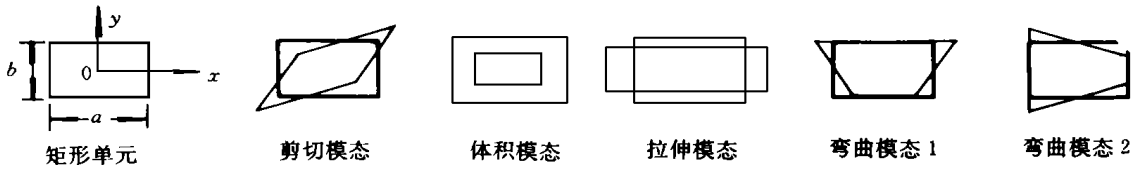


图 2 矩形单元及其变形模式

变化, 由于与之对应的刚度趋向无穷大, 阻碍了这两种变形的发生, 而对于弯曲问题, 这是极其重要的变形, 是不应该抑制的. 这两种变形是在等体积下发生的, 有人称之为“寄生模式”, 由于它的应变能为零, 又称为“零能模式”. 许多研究者进行了大量研究, 将这种模式从体积变形中分离出来, 构造了适合不同问题的四边形单元.

1 分片试验

人们在构造单元时, 往往用分片试验方法来检验单元的收敛性特征. 分片试验是由 Irons^[5]提出的, 它是检验单元是否满足收敛性条件的实用方法. 试验单元在常应变或常应力边界条件下, 对于包含内点的网格, 单元能否重现常应变或常应力, 如果能重现, 则通过分片试验, 当单元直径趋向于零时, 保证收敛到正确解. 在构造四边形单元时, 也用分片试验方法检验单元的收敛性. 然而在构造四边形单元时, 有时使用不协调位移模式, 生成的单元刚度矩阵不能通过分片试验, 结果还是不错, 而且收敛. 于是 Taylor^[6,7]等人提议计算单元刚度时, 用常雅可比矩阵进行计算, 非协调位移模式就能通过分片实验. 文献 [8]把这种强制畸变单元通过分片试验的方法称为“等参变换正则化”修正法, 并采用“求逆犯规”对其作进一步修正. Belytschko^[9]等人提出“分形分片试验”(fractal patch test, 分形在这里仅借用, 并不是真的分形), 即不断细分的相似单元网格下, 在边界加以给定位移场时, 内部点是否收敛到给定的位移场, 如果收敛, 则通过“分形分片试验”. Belytschko 给出不能通过 Irons 的分片试验, 却能通过“等级分片试验”的单元. 这种分片试验也可以分析收敛速度, 是一种弱形式的分片试验.

2 构造高精度四结点单元方法

在过去几十年中, 许多研究者为了改进四节点单元的性能, 提出了许多方法, 其中主要的可分为三类, 这些方法可以相互结合, 形成具有某种特征的单元.

2.1 不协调位移模式

为了解决平面问题四节点单元对弯曲变形精度差的不足, Wilson^[10]等人在协调单元位移模式的基础上, 引入不协调的内部自由度位移模式, 即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 [N_i(a, Z)I] \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^2 [P_i(a, Z)I] \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中

$$N_i(a; Z) = \frac{1}{4}(1 + a_i a)(1 + Z Z), P_1(a; Z) = 1 - Z, P_2(a; Z) = 1 - Z$$

I 为 2×2 的单位矩阵

这种单元被称为 Q_6 单元, 它对矩形单元精度很高, 但是这种位移模式不能通过歪曲单元的分片试验。Taber 和 Wilson 等人用第二节中提到的“等参变换规则化”方法对 Q_6 单元进行修正, 使其能够通过弱形式的分片试验, 这就是 Q_{M6} 单元, 它的特征可见图 1 中的 Q_{M6} 曲线, 可见这种单元的性能不错。文献^[11]采用求逆犯规方法对 Q_{M6} 单元进一步修正, 并将其应用于八至二十节点等参元, 得到一类适应空间不规则网格的非协调 Q_{MM6} 单元, 此单元在畸变网格下精度高于 Q_{M6} 单元, 且计算量减少。这些方法都是简单地利用不协调位移模式。Hueck^[12-13]等人把 (1) 式在单元 $a = Z = 0$ 点处展开成物理空间中的泰勒级数, 截取至二阶项。由一阶项得到刚度矩阵的基本部分, 利用关于内部自由度的平衡方程, 消除内部自由度, 得到刚度矩阵的修正部分。将它应用到不可压缩材料, 得到满意结果, 它对弯曲问题的特征可见图 1 中 Q_{S6} 曲线。文献^[14]采用更复杂的不协调位移模式和平均协调方法, 取得了几何不敏感单元, 但其单元列式已很复杂。

2.2 降阶积分或有选择的数值积分

由于 4 节点协调单元的单元刚度矩阵刚度太硬, 因此有的研究者采用不充分的高斯积分方法, 例如 2×2 高斯点对于 4 节点单元是足够阶的, 降阶积分就是减少高斯积分点数, 如用一个高斯积分点。由此单元刚度矩阵秩不足, 于是有的对体积刚度部分采用降阶积分方法, 对其余部分不采用降阶积分方法^[15-16], 或者有方向性的采用降阶积分方法。对于各向同性材料和线性问题, 这种方法还是有效的。Hughes^[17]将这种方法加以推广到各向异性介质和非线性问题, 将应变矩阵进行插值, 应变的插值函数次数低于单元位移插值函数, 用这种方法设计了好几种单元。这种方法提出得较早, 但仍然有些研究者还采用。

2.3 假定应力法

Pian^[18-19]等人将应力和位移分别插值, 利用两场的 Hellinger-Reissner 变分原理, 得到性能良好的单元。Weissman^[20]等人将 Pian 的工作推广到轴对称问题。

Pian 构造不协调位移模式单元时, 采用修正的 Hellinger-Reissner 两场泛函。单元位移场由两部分组成, 即协调位移场 u_q , 不协调位移场 u_λ 。

其中

$$u = u_q + u_\lambda \quad (2)$$

$$u_q = N_q d_e \quad (3a)$$

$$u_\lambda = N_\lambda \lambda \quad (3b)$$

$u_q + u_\lambda$ 为一完全多次式, N_q, N_λ 为插值函数, d_e 节点位移, λ 为不协调参数自由度。假定应力场也分为两部分, 即常应力场 e_c , 高阶应力场 e_h , 表示为:

$$e = e_c + e_h = U + Q U_h = U + [Q] Q \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [O] \{U\} \quad (4)$$

其中 U 为参数 Q , Q 为插值函数

Pian 采用的修正 Hellinger-Reissner 泛函为:

$$\mathcal{R} = \sum_e \int_{V_e} \left[-\frac{1}{2} e^T S e + e^T (\nabla^s u) \right] dV - \oint_{\partial V_e} e_n^T u_\lambda dS \quad (5)$$

其中 e 为应力, u 为位移, $\nabla^s u$ 为应变, S 为材料柔度矩阵, n 为单元边界外法线方向。另外还有附加条件:

$$\oint_{\partial V_e} e_n^T W_\lambda dS = 0 \quad (6)$$

利用此条件使 (4) 式的未知数减少。

如果 n_q , n_s 和 n_U 分别表示协调位移, 不协调位移和应力场的自由度, V 表示所研究问题刚体运动自由度数, 那么它们之间满足

$$n_U \geq n_q + 2n_s - V \quad (7)$$

以保证单元稳定性。以此种方法形成的单元记为 $\mathcal{S}U$ 其性能可见图 1 中 $\mathcal{S}U$ 曲线。此种方法由于存在求逆, 而且仅适合弹性问题, 限制了它的使用范围。

2.4 假定应变法

此种方法通常采用两场变量, 其一是位移场, 其二是应变场。Simo^[21, 22] 等人在综合他人方法的基础上, 为假定应变法提供了理论基础。它的出发点是 Hu-Washizu 原理, 其形式为:

$$G_I = \iint_K [W(X) - \sigma(X - \nabla^s u)] dV - \int_K f^T \cdot u dV - \int_{\partial K} \bar{U} \cdot u dS \quad (8)$$

其中 $W(X)$ 为应变能密度。假定允许的位移场, 应力场和应变场分别为 Z , f 和 V , 又真实的位移场, 应力场和应变场分别为 u , e 和 X 由上述泛函得到三个等价的泛函:

$$\int_K \nabla^s Z \cdot e dV - G_{ext}(Z) = 0 \quad (\text{平衡关系}) \quad (9)$$

$$\text{其中 } G_{ext}(Z) = \int_K f^T \cdot Z dV + \int_{\partial K} \bar{U} \cdot Z dS$$

$$\int_K f \cdot [\nabla^s u - X] dV = 0 \quad (\text{应变与位移关系}) \quad (10)$$

$$\int_K V \cdot [-e + \frac{\partial W(X)}{\partial X}] = 0 \quad (\text{本构关系}) \quad (11)$$

若假定允许应变场采用下列形式

$$V = \nabla^s Z + \bar{V} \quad (12)$$

其中 $\nabla^s Z$ 是协调的应变场, \bar{V} 为扩展的应变场, 它不受协调性限制。若对真实的应变场采用同 (12) 式相同形式的分解

$$X = \nabla^s u + \bar{X} \quad (13)$$

于是得到三场变分方程

$$\int_K f \cdot \bar{X} dV = 0 \quad (14)$$

$$\int_K \nabla^s Z \cdot \frac{\partial W}{\partial X} (\nabla^s u + \bar{X}) dV - G_{ext}(Z) = 0 \quad (15)$$

$$\int_K \bar{V} \cdot [-e + \frac{\partial W}{\partial X} (\nabla^s u + \bar{X})] dV = 0 \quad (16)$$

上述三方程是假定应变法的基础。

2.5 假定应力应变法

用假定应力应变法研究四节点单元首先由 Belytschko^[23] 进行的。假定场有三场, 即位移场, 应力场和应变场。其依据是 Hu-Washizu 三场变分原理, 如 (8) 式所示。

在单元内假定场为

$$e = S \cdot s, \quad X = E \cdot e, \quad u = N_e \cdot d_e \quad (17)$$

代入 (8) 式得

$$\begin{bmatrix} H & -A^T & 0 \\ -A & 0 & G \\ 0 & G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ s \\ d_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{其中 } H = \int_K E^T D E dK, A = \int_K S^T E dK, G = \int_K S^T B dK$$

$$\bar{f} = \int_K N^T f dK + \int_{B_K} N^T \bar{p} dB, B = \nabla^S u$$

消除应力应变场参数后, 得单元刚度矩阵

$$K = G^T (A H^{-1} A^T) G \quad (19)$$

为了保证单元稳定, 各场自由度数应有如下关系

$$n_e + n_s \geq n_d, n_d \geq n_s$$

其中 n_e , n_s 和 n_d 分别表示应变、应力和位移场自由度数。这种方法的关键是假定应力场, 它要修改本构关系, 不具有一般性。此种方法由于采用三场构造, 过于复杂, 很少有人采用。

2.6 简单位移模式迭加法

钟万勰等人^[24, 25]采用低价精确位移弹性力学解迭加构造平面问题低阶单元也有一定的效果, 这种方法对于其它问题有着固有的困难, 因为不易得到相应问题的精确解。

3 结束语

低阶高精度单元的研究不仅有重要的理论意义, 丰富了有限元理论, 而且很有实际意义。性能良好的低阶高精度单元, 可以节省计算机计算时间和内存, 特别是非线性问题, 优越性就更加明显, 因此许多研究者作了大量工作, 对非线性问题和动力问题也着手进行了研究。平面问题的研究比较完善, 相对于轴对称问题、空间问题, 也还比较简单。空间问题的研究意义更大, 对节省计算时间很有意义。本文所述只是目前较为流行的方法, 并未对低阶高精度单元作全面的论述, 还有大量文献未提及。低阶高精度单元经过研究者的不懈努力, 会找到符合人们需要的单元。

参考文献

- 1 Taig IC. Structural analysis by the matrix displacement method. English Electric Aviation Limited Report S. Q. 1961
- 2 Taig IC and Kerr R I. Some problems in the discrete element representation of aircraft structures. Matrix method of structure analysis, Pergamon Press, Oxford, 1964
- 3 Irons BM. Engineering application of numerical integration in stiffness method. AIAA J. 1966, 4: 2035
- 4 Hacker W L and Schreyer H L. Eigenvalue analysis of compatible and incompatible rectangular four-node quadrilateral elements. Int J Numer Meth. Eng. 1989, 28: 687-703
- 5 Irons BM and Razzque A. Experience with the patch test for convergence of finite element methods. In A. K. Aziz (ed) Mathematical foundations of the finite element methods. Academic Press New York, 1972
- 6 Taylor R L, Beresford P J and Wilson E L. A non-conforming element for stress analysis. IJNME, 1976, 10: 1211
- 7 Taylor R L, Simo J C, Zienkiewicz O C. The patch test—a condition for assessing FEM convergence. IJNME, 1986, 22: 39-62
- 8 唐晓阳, 许晓然, 刘玉文. 研究 Wilson 不协调元的两个新概念. 科学通报, 1988, 13: 10037
- 9 Belytschko T and Lasry D A. fractal patch test. IJNME, 1988, 26: 2199
- 10 Wilson E L, Taylor R L, Dornhety P W. Incompatible displacement models. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, 1973
- 11 姚传玺, 鹿晓阳等. 改进的八至二十节点三维非协调得不偿等单元. 计算结构力学及其应用, 1989, 6(1)
- 12 Hueck U and Wriggers P. A formulation for the 4-node quadrilateral element. IJNME, 1995, 38: 3007
- 13 Hueck U, Schreyer H L and Wriggers P. On the incompressible constraint of four-node quadrilateral element. IJNME, 1995, 38: 3039
- 14 龙驭球, 须寅. 构造几何不敏感四边膜元的广义协调方法. 力学学报, 1997, 29(6)
- 15 Hughs T J R, Liu W K and Brooks A. Review of finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. J Comp Phys. 1979, 30: 1-60
- 16 Malakus D S and Hughs T J R. Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques—a unification of concepts. Comp Meth Appl Mech. Engng. 1978, 15: 163-81
- 17 Hughs T J R. Generalization of selective integration procedures to an isotropic and non linear media. IJNME, 1980, 15: 1414
- 18 Pian T H H and Chen D. On the suppression of zero energy deformation modes. IJNME, 1984, 20: 1685
- 19 Pian T H H and Wu C C. A rational approach for choosing stress tensor for Hybrid finite element formulation. Int J Numer Meth

Eng 1988 6 2331

- 20 Weis an S L and Taybr R L. Four-node axisymmetric element based upon the Hellinger-Reissner functional. *Comput Methods Appl Eng*. 1991 85: 39-55
- 21 Sino J C and Hughs T J R. On the variational foundations of assumed strain methods. *J. A. M.* 1986 53: 51-54
- 22 Sino J C and Rifai M S. A class of mixed assumed strain methods and their method of incompatible modes. *Int J Numer Meth Eng* 1990 29: 1595-1638
- 23 Belytschko T and Bachrach W E. Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy. *Comput Methods Appl Mech Engng* 1986 54: 279-301
- 24 钟万勰, 纪峥. 理性有限元. 计算结构力学及其应用, 1996 13(1)
- 25 纪峥, 钟万勰. 平面理性四节点及五节点四边形有限元. 力学学报, 1997 14(1)