

## 一维结构瞬态响应分析的传递函数方法\*

冯志刚 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 本文给出了一种求解一维结构瞬态响应问题的解析方法。通过对控制方程及其定解条件进行 Laplace 变换, 将问题写成状态空间形式, 用传递函数法求得统一形式的解析解。通过 Laplace 逆变换求得结构在时域内的瞬态响应。文中给出了一些一维结构动力响应问题的算例。

**关键词** 传递函数, 瞬态响应, Laplace 变换, Laplace 逆变换

**分类号** TB12

## Transient Response Analysis of One Dimensional System by Distributed Transfer Function Method

Feng Zhigang Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** The paper presents an analytical method for the analysis of dynamic response of one dimensional structures. In the analysis, the linear partial differential equations and the inhomogeneous boundary conditions that govern the response of the distributed subsystem are Laplace transformed with respect to time, and case into a state space form. The transfer function is determined in an exact and closed form by the state space technique. The transient response is obtained using the inverse Laplace transformation. Numerical examples are provided to illustrate the efficiency of the method.

**Key words** transfer function, transient response, Laplace transform, inverse Laplace transform

对系统动态响应问题的研究一直是科学研究的前沿。目前研究动力响应问题的方法主要是半离散化方法<sup>[1]</sup>。最近几年, B. Yang<sup>[2]</sup>, C. A. Tan<sup>[3]</sup>和周建平<sup>[4][5]</sup>等人关于分布参数系统传递函数方法的研究引起了许多学者的关注。传递函数法不进行空间离散, 通过把瞬态响应问题写成状态空间形式, 而直接求出系统的响应, 因而具有较高的精度。运用该方法 B. Yang 研究了一维分布参数系统的振动问题, 并给出了一个 Laplace 变换后的积分形式的解析解。周建平<sup>[4][5]</sup>则把该方法推广到了二维与三维结构的求解上。本文结合传递函数法的优点, 通过 Laplace 逆变换来求一维结构的瞬态响应。文中对传递函数法进行了一些推广, 并对解的形式进行了化简与变换, 以更适于于一维结构的瞬态响应的求解。文中给出了数值算例。

### 1 一维子结构的传递函数方法

设子结构关于响应函数  $w(x, t)$  的控制方程组为

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{kj} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j} w(x, t) = f_c(x, t), x \in [0, 1], t > 0 \quad (1)$$

$$M_i[w(0, t)] + N_i[w(1, t)] = Y_{Bi}(t), i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0 \quad (2)$$

其中  $f_c(x, t)$ ,  $Y_{Bi}(t)$ ,  $V_i(x)$  是已知函数,  $A_{kj}$  为方程系数,  $n, m$  分别是对空间坐标和时间坐标的最大求导

\* 1997年4月30日修订

本文由国家自然科学基金(资助号 19572027)、国家教委归国留学人员基金和国防科技大学校预研基金资助

第一作者: 冯志刚, 男, 1969年生, 博士

$$\text{阶次, } M_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} B_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j}, N_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} C_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial^j}{\partial t^j}.$$

对方程 (1)、(2) 进行 Laplace 变换, 利用了初始条件 (3) 式, 得

$$\left( \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m s^j A_{kj} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \overline{w(x,s)} = \overline{f_{el}(x,s)} \quad (4)$$

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} s^j B_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \overline{w(0,s)} + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} s^j C_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \overline{w(1,s)} = \overline{y_i(s)}, i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

其中  $\overline{w} = L(w)$  是函数  $w$  的 Laplace 变换

$$\overline{f_{el}(x,s)} = \overline{f_e(x,s)} + \overline{f_0(s)}$$

$$\overline{f_0(s)} = \left( \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{kj} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \left( \sum_{p=0}^{j-1} s^{j-p-1} V_p(x) \right)$$

$$\overline{v_i(s)} = \overline{v_{Bi}(s)} + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} B_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \left( \sum_{p=0}^{j-1} s^{j-p-1} V_p(0) \right) + \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} C_{kj,i} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \left( \sum_{p=0}^{j-1} s^{j-p-1} V_p(1) \right)$$

将 (4)、(5) 写成状态空间形式

$$\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\eta}(x,s) = F(s) \boldsymbol{\eta}(x,s) + q(x,s), x \in [0, 1] \quad (6)$$

$$M(s) \boldsymbol{\eta}(0,s) + N(s) \boldsymbol{\eta}(1,s) = \mathcal{Y}(s) \quad (7)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(x,s) = \{ \overline{w(x,s)}, \frac{\partial}{\partial x} \overline{w(x,s)}, \dots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \overline{w(x,s)} \}^T, F(s) = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ F_{n1}(s) & \dots & F_m(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$F_{ni}(s) = - \frac{\sum_{j=0}^m A_{(i-1)j} s^j}{\sum_{j=0}^m A_{nj} s^j}, j = 1, 2, \dots, n, q(x,s) = \left\{ 0, 0, \dots, \frac{\overline{f_{el}(x,s)}}{s^m}, \dots, A_{nj} s^j \right\}^T$$

$$M(s) = [M_{ij}(s)], M_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{m-1} s^k B_{jk,i}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$N(s) = [N_{ij}(s)], N_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{m-1} s^k C_{jk,i}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathcal{Y}(s) = \{ \mathcal{Y}_1(s), \mathcal{Y}_2(s), \dots, \mathcal{Y}_n(s) \}^T$$

利用传递函数解法, 方程 (6)、(7) 的解为

$$\boldsymbol{\eta}(x,s) = \int_0^1 G(x,\xi,s) q(\xi,s) d\xi + H(x,s) \mathcal{Y}(s), x \in [0, 1] \quad (9)$$

其中矩阵传递函数的定义如下

$$G(x,\xi,s) = \begin{cases} H(x,s) M(s) \Phi(-\xi,s), & \xi < x \\ -H(x,s) N(s) \Phi(1-\xi,s), & \xi > x \end{cases}$$

$$H(x,s) = \Phi(x,s) [M(s) + N(s) \Phi(1,s)]^{-1}$$

其中  $\Phi(x,s) = e^{F(s)x}$  是该问题解的基矩阵。

表达式 (9) 给出了结构响应的 Laplace 变换后的积分形式的解析解, 而传递函数内则包含着结构响应所需要的任何信息。结构的特征方程由传递函数的奇异性条件给出

$$\det[M(s) + N(s) \Phi(1,s)] = 0 \quad (10)$$

## 2 瞬态响应方法

若要得到时域内结构的瞬态响应, 则需对式 (9) 进行 Laplace 逆变换。

假设: (1) 方程 (10) 的根为  $\tau_{1i}, i = 1, 2, \dots, N_1$ ; (2) 外载相关的  $q(\xi,s)$  的极点为  $\tau_{2i}, i = 1, 2, \dots, N_2$ ; (3) 边界条件相关的  $\mathcal{Y}(s)$  的极点为  $\tau_{3i}, i = 1, 2, \dots, N_3$ 。根据留数定理,  $\boldsymbol{\eta}(x,s)$  的反 Laplace 变换为

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{N_i} R_{s=\tau_{ij}} e^{s(\eta(x, s))} e^{\tau_{ij} t} \quad (11)$$

利用 (11) 式可求出在任意初始条件与任意外载荷作用下结构的响应。但由于  $\overline{w(x, s)}$  很复杂, 是一个积分形式的结果, 直接利用并不方便。针对不同情形, 可对解形式 (9) 进行化简:

(1) 当外载都是集中载荷或可等效为集中载荷时, 则载荷可表示为

$$f^e(x, t) = \sum_i P_i \delta(x - x_i) f_i(t) \quad (12)$$

其中  $\delta(x)$  是 Dirac 函数。则

$$\overline{f^e(x, s)} = \sum_i P_i \delta(x - x_i) \overline{f_i(s)} + f_0(s) \quad (13)$$

$$q(x, s) = \sum_i P_i \delta(x - x_i) q_{1i}(s) + q_0(s) \quad (14)$$

其中

$$q_{1i}(s) = \left\{ 0, 0, \dots, \frac{\overline{f_i(s)}}{A_{nj} s^j} \right\}^T \quad q_0(s) = \left\{ 0, 0, \dots, \frac{\overline{f_0(s)}}{A_{nj} s^j} \right\}^T$$

将 (14) 代入 (9) 有

$$\eta(x, s) = \sum_i G(x, x_i, s) P_i q_{1i}(s) + T(x, s) q_0(s) + H(x, s) Y(s) \quad (15)$$

其中

$$T(x, s) = [G(x, 0, s) - G(x, 1, s)] F(s)^{-1} \quad (16)$$

(2) 当外载可表示成

$$f^e(x, t) = f(x) g(t) \quad (17)$$

于是可将  $f(x)$  展开成 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{k=-}^{+} D_k e^{ik\pi(2x-1)} \quad D_k = \int_0^1 f(x) e^{-ik\pi(2x-1)} dx \quad i = \overline{-1} \quad (18)$$

则

$$q(x, s) = \sum_{k=-}^{+} q_{2k}(s) e^{ik\pi(2x-1)} + q_0(s) \quad q_{2k}(s) = \left\{ 0, 0, 0, \frac{D_k \overline{g(s)}}{A_{nj} s^j} \right\} \quad (19)$$

将 (19) 代入 (9) 有

$$\eta(x, s) = \sum_{k=-}^{+} T_{2k}(x, s) q_{2k}(s) + T(x, s) q_0(s) + H(x, s) Y(s) \quad (20)$$

其中

$$T_{2k}(x, s) = \frac{1}{2ik\pi} [G(x, 1, s) e^{ik\pi} - G(x, 0, s) e^{-ik\pi}] (I - \frac{1}{2ik\pi} F(s))^{-1}$$

这种处理方法对载荷不能分离变量的情形也适用, 不过形式略有变化。

(3) 对任意复杂的载荷形式  $f^e(x, t)$ , 总可对它进行分段线性近似, 如图 1

$$f^e(x, t) = \frac{f(x_{i-1}, t) + f(x_i, t)}{2}, x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (21)$$

其中

$$x_0 = 0, x_N = 1, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N$$

则

$$\overline{f^e(x, s)} = \frac{\overline{f(x_{i-1}, s)} + \overline{f(x_i, s)}}{2}, x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

将 (22) 式代入 (9) 有

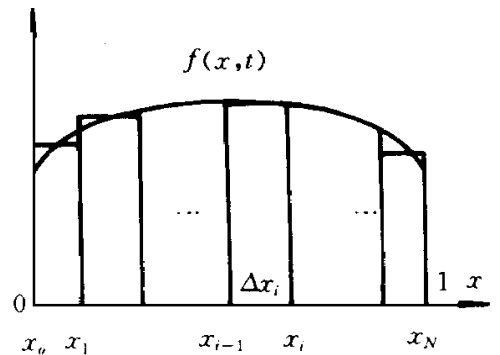


图 1 载荷线性近似图

$$\eta(x, s) = \sum_{i=1}^N T_{3i}(x, s) q_{3i}(s) + T(x, s) q_0(s) + H(x, s) Y(s) \quad (23)$$

其中  $T_{3i}(x, s) = [G(x, x_{i-1}, s) - G(x, x_i, s)] F(s)^{-1}$ ,  $q_{3i}(s) = \left\{ 0, 0, 0, \frac{\overline{f(x_{i-1}, s)} + \overline{f(x_i, s)}}{2 \sum_{j=0}^m A_{nj} s^j} \right\}^T$

经过式 (15), (20) 和 (23) 的化简与近似, (9) 式中的积分运算已被消掉, 再利用 (11) 式进行 Laplace 逆变换就很容易了。

### 3 数值算例

(1) 两端固定弦在初始速度下的有阻尼振动, 如图 2 求解

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u(0, t) = 0, u(l, t) &= 0 \\ u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= v \end{aligned}$$

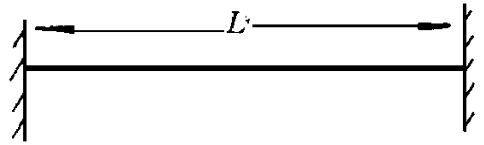


图 2 弦结构模型

可推得解析解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1} e^{-\frac{\mu}{2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} B_n \sin \omega t$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\mu}{\rho} \\ B_n = \frac{2v}{n\pi\omega} (1 - \cos i\pi) \\ \omega^2 = -\frac{4\rho T n^2 \pi^2 - l^2 \mu^2}{4l^2 \rho^2} \end{cases}$$

取  $L = 1, a_1 = 1, v = 1, T = \rho$ , 进行计算, 本文解与解析解的对比见表 1。

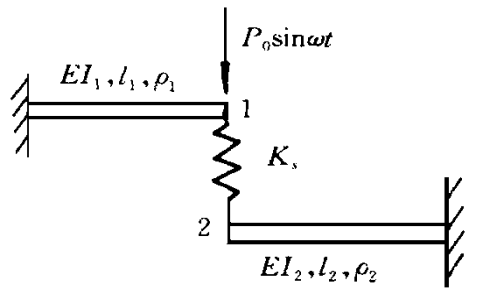


图 3 一维组合结构

表 1 弦有阻尼瞬态解

时间	0.1	0.6	1.0	2.0
本文解	0.095158	0.302599	0.009664	-0.011713
解析解	0.095162	0.302522	0.009664	-0.011713

(2) 一维组合结构瞬态响应解, 如图 3

给定  $EI_1 = 20, EI_2 = 25, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.5, K_s = 200, P_0 = 1, \omega = 1$ , 节点 1 与节点 2 的本文解 (TFS) 与有限元解 (FEM, 50 个单元) 的对比见图 4 与图 5。

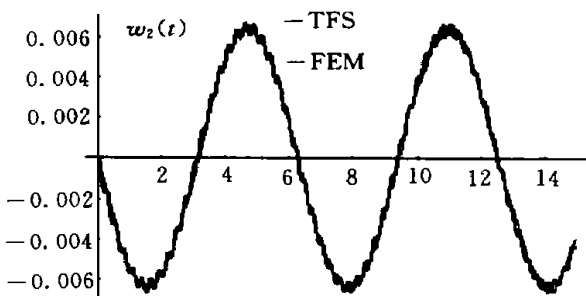


图 4 节点 2 的响应

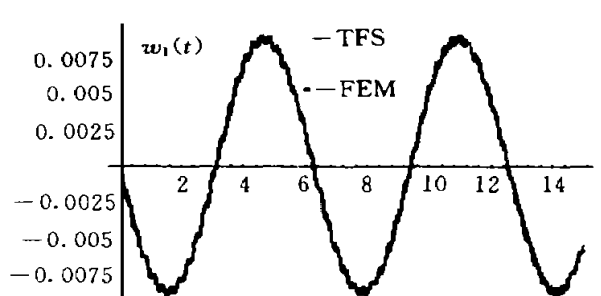


图 5 节点 1 的响应

## 4 结 论

作为一种求解结构瞬态响应的新方法, 传递函数法具有求解形式统一、结果表达一致的优点。通过对传递函数解进行简化与近似, 本文给出了一种实用的 Laplace 逆变换方法, 并进一步求出了结构的时域响应解。数值算例表明, 本文的方法可给出精度很高的结果。用本文的方法还可方便地处理各种结构阻尼问题, 解决办法完全同于不含阻尼结构的处理, 因此具有较广的适应性。用本文方法形成的超级单元, 通过在边界节点上广义力的平衡很容易与有限元、边界元等进行拼装, 因而易于与其它数值方法进行联合求解。由于本文的状态空间描述方法, 该方法在结构的振动控制研究方面将有独特的优点。

## 参考文献

- 1 Thomas J R Hughes. Computational Methods for Transient Analysis. Elsevier Science Publishers B. V., 1983
- 2 B. Yang and C A Tan. Transfer Functions of One-Dimensional Distributed Parameter Systems. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 1009 ~ 1014
- 3 C A Tan and C H Chung. Transfer Function Formulation of Constrained Distributed Parameter Systems, Part I: Theory. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60: 1005 ~ 1011
- 4 Jianping Zhou and Bingen Yang. Distributed Transfer Function Methods for Analysis of Cylindrical shells. AIAA Journal, 1995, 33 (9): 1698 ~ 1708
- 5 Jianping Zhou and Bingen Yang. Three Dimensional Analysis of Simple Supported Laminated Cylindrical Shells with Arbitrary Thickness. AIAA Journal, 1996, 34 (9): 1960 ~ 1964