

动静压轴承油腔压力及其偏导的快速迭代方法^{*}

邓圭玲 蒋炳炎

(中南工业大学机电工程学院 长沙 410083)

朱 均

(西安交通大学润滑理论及轴承研究所 西安 710049)

摘 要 对于毛细管节流的动静压轴承, 基于流量平衡方程和偏导形式的流量平衡方程, 本文建立了油腔压力和油腔压力偏导的迭代准则和迭代公式。实践证明, 该迭代方法具有物理意义明晰、迭代次数少和迭代适应性强的特点, 可以显著提高毛细管节流的动静压轴承静动特性分析计算有限元程序的计算速度。

关键词 流量平衡方程和偏导形式的流量平衡方程, 油腔压力和油腔压力偏导, 迭代准则和迭代公式, 毛细管节流动静压轴承

分类号 TH133.36, TH133.37

A Rapid Iterative Method Iterating the Recess Pressure and Its Partial Derivatives of Hybrid Bearings

Deng Guiling Jiang Bingyan

(College of Mechanical and Electrical Engineering, CSUT, Changsha, 410083)

Zhu Jun

(Theory of Lubercation fand Bearing Institute, Xian JiaoTong University, Xian, 710049)

Abstract Based on the continuity equation and its partial derivative equation, tieratie criterions and formula iterating the recess pressure and its partial derivatives of capillary compensated hybrid journal bearings have been established in this paper. The results show that this iterative method needs only a few iterations, it is suitable for various situations and clear in physical meaning, it can save a lot of computing time by applying it in a finite element method software which calculates the static and dynamic performances of capillary compensated hybrid journal bearings.

Key words continuity equation and its partial derivative equation, recess pressure and its partial derivatives, iterative criterions and formula, capilliary compensated hybrid bearings

对于液体动静压轴承, 用数值法求解雷诺方程和流量平衡方程及其相应的偏导形式的方程时, 常用迭代方法求各油腔的油腔压力和油腔压力偏导。文[1]介绍了有限差分法求解油腔压力的低松弛迭代法, 松弛因子一般取常值, 如0.3或0.5。文[2]介绍了一种直接迭代油腔压力和油腔压力偏导的有限差分法, 这种方法的特点是由上轮压力分布直接计算油腔压力, 并反复迭代总体压力分布直到收敛; 由上轮压力偏导直接计算油腔压力偏导, 并反复迭代总体压力偏导分布直到收敛。文[2]还介绍了有限元法迭代求解油腔压力的方法。文[3]在作了某些假设和仅把油腔中进油口作为流量平衡方程的边界条件的前提下, 介绍了一种直接求油腔压力的有限元法。本文将介绍一种油腔压力及其偏导的新的快速迭代方法。这种方法的特点是油腔压力及其偏导的迭代次数少, 迭代的适应性强, 在雷诺

^{*} 1998年4月25日收稿
第一作者: 男, 1964年生, 讲师

方程和流量平衡方程其相应的偏导形式的方程基础上不需再作假设，将整个油腔或把油腔进油口作为流量平衡方程及其偏导形式的方程的边界条件，物理意义明晰。当把这种迭代方法用于毛细管节流的液体动静压轴承静动特性分析计算的有限元程序时，显著地提高了计算速度。

1 油腔压力和油腔压力偏导的迭代对液体动静压轴承静动特性分析计算的有限元程序计算速度的影响。

图 1 是用有限元法计算液体动静压轴承的静动特性参数的程序框图。其中轴承的动特性参数是通过求解偏导形式的雷诺方程和流量平衡方程获得压力偏导分布后计算得到的。

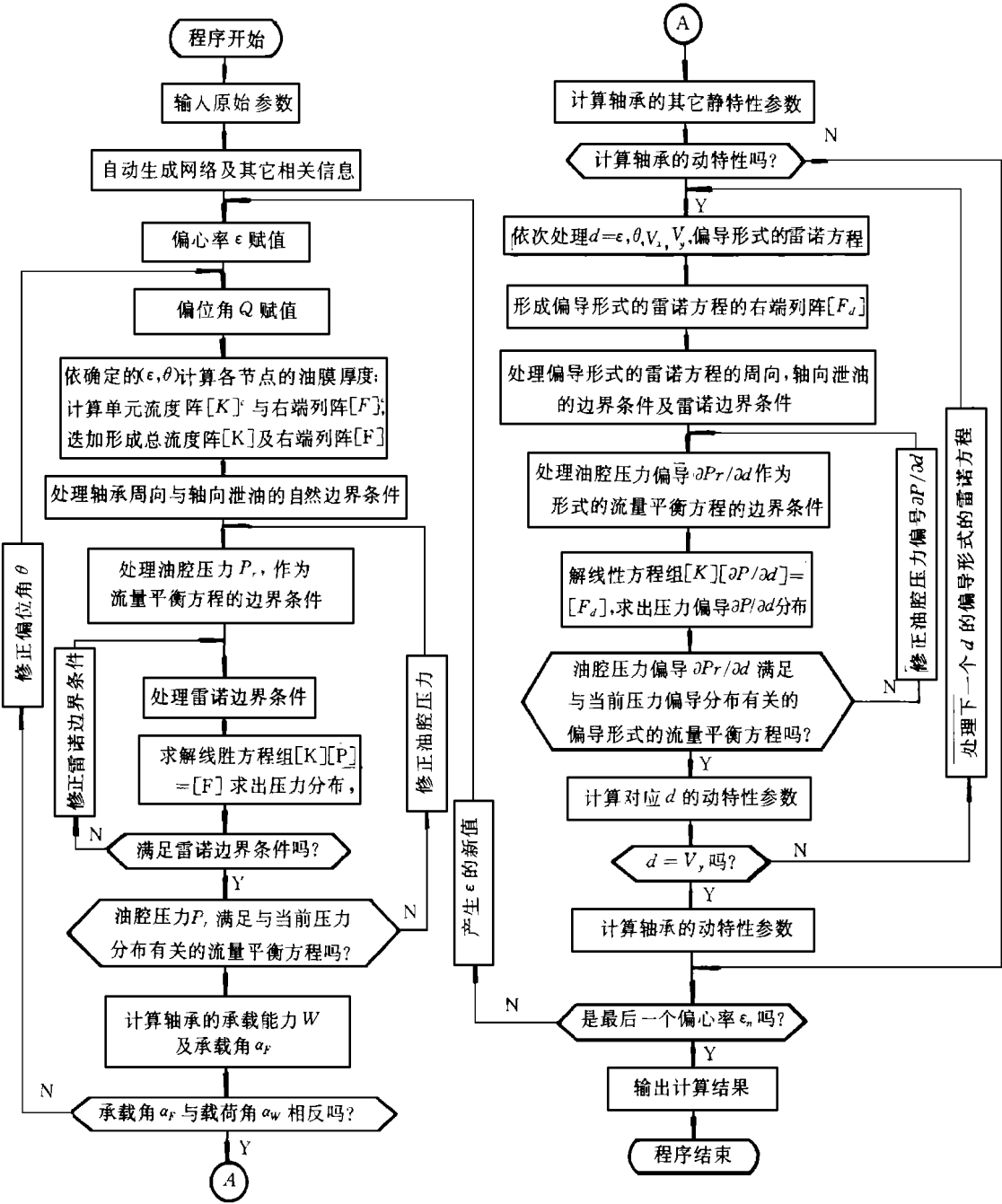


图 1 程序框图

从程序框图可知：油腔压力或油腔压力偏导的迭代次数直接影响求解线性方程组的次数，而线性方程组求解在有限元法中耗时最多。因此，减少油腔压力和油腔压力偏导的迭代次数，可以相应地提高程序的计算速度。

2 油腔压力和油腔压力偏导的迭代准则

2.1 流量平衡方程和偏导形式的流量平衡方程。

对于外部供油的动静压轴承，求解的压力分布偏导分布必须同时满足偏导形式的雷诺方程和流量平衡方程。

如图 2 所示，取包括边界的无量纲区域 $abcd$ 为流量控制体， $abcd$ 区域既可以是整个油腔，也可以是进油口的邻近处。对毛细管节流的液体动静压轴承，其无量纲的流量平衡方程为：

$$Q_{\text{节}} = Q_{\text{out}} + Q_v \quad (1)$$

$$Q_{\text{节}} = \alpha(P_s - P_r) \quad (1-a)$$

$$Q_{\text{out}} = Q_{oc} - Q_{lc} + Q_{\alpha c} - Q_{ls} \quad (1-b)$$

$$Q_v = (\Lambda/2) \iint_{abcd} [V_x \sin \Phi + V_y \cos \Phi] d\Phi dV \quad (1-c)$$

$$\text{静态时有: } V_x = 0, V_y = 0, Q_v = 0 \quad (1-d)$$

偏导形式的无量纲流量平衡方程为：

$$\frac{\partial Q_{\text{节}}}{\partial l} = \frac{\partial [Q_{\text{out}} + Q_v]}{\partial l}$$

$$d = \epsilon, \theta, V_x, V_y$$

求解压力分布时，控制体 $abcd$ 内的油腔压力 P_r 必须满足流量平衡方程 (1)；求解压力偏导分布时，控制体 $abcd$ 内油腔压力的偏导 $\partial P_r / \partial l$ 必须满足偏导形式的流量平衡方程 (2)。

2.2 油腔压力 P_r 的迭代准则

设控制体内的压力为油腔压力 $P_r^{(k)}$ ，对应于 $P_r^{(k)}$ ，有 $Q_{\text{节}}^{(k)}$ 和 $Q_{\text{out}}^{(k)}$ 则：

$$Q_{\text{节}}^{(k)} = \alpha(P_s - P_r^{(k)}) \quad (3)$$

$$\text{不妨令: } Q_{\text{out}}^{(k)} = \alpha(P_s - P_{rF}^{(k)}) \quad (4)$$

则流入与流出控制体 $abcd$ 的不平衡流量 $\Delta Q^{(k)}$ 有：

$$\Delta Q^{(k)} = Q_{\text{节}}^{(k)} - Q_{\text{out}}^{(k)} = \alpha(P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)})$$

$$\text{相对流量差 } \epsilon \Delta Q^{(k)} = \Delta Q^{(k)} / Q_{\text{节}}^{(k)} = (P_{rF}^{(k)} - P_r) / (P_s - P_r^{(k)})$$

若流量平衡满足，则 $\epsilon \Delta Q^{(k)} = 0$ 。

通常认为 $\epsilon \Delta Q^{(k)} \leq \delta_i$ ，即满足流量平衡。

考虑到 $P_s - P_r^{(k)}$ 较小时，满足 $\epsilon \Delta Q^{(k)} \leq \delta_i$ ，将使 $P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)}$ 相当小，受计算精度影响，满足流量平衡方程的油腔压力 P_r 的迭代准则为：

$$P_{rF}^{(k)} - P_r / P_s - P_r^{(k)} \leq \delta_i \quad (5)$$

$$\text{当 } P_s - P_r^{(k)} < 0.005 \text{ 时, } P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)} \leq \delta_i' \quad (5-a)$$

一般取 $\delta_i = 0.005 \sim 0.001$ ， $\delta_i' = 0.001$

显然，迭代准则 (5) 具有流量平衡的意义。

2.3 油腔压力偏导 $\partial P_r / \partial l$ 的迭代准则

设油腔压力偏导为 $(\partial P_r / \partial l)^{(k)}$ ，则对应的

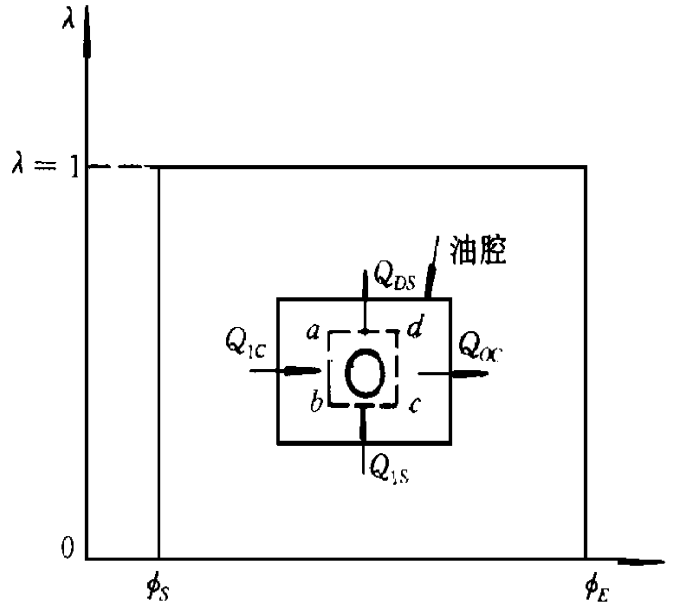


图 2 流量控制体

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^{(k)} = -\alpha \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} \quad (6)$$

不妨令

$$\left(\frac{\partial Q_{out} + Q_v}{\partial l}\right)^{(k)} = -\alpha \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} F^{(k)} \quad (7)$$

同 P_r 一样, 不难得出满足偏导形式的流量平衡方程的油腔压力偏导的迭代准则为:

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} F^{(k)} / \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} \leq \delta_1 \quad (8)$$

$$\text{若 } \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} \leq 0.005, \text{ 则 } \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} F^{(k)} \leq \delta_1 \quad (8-a)$$

3 P_r 与 $\partial P_r / \partial l$ 的快速迭代

3.1 P_r 与 $\partial P_r / \partial l$ 的一般迭代方法分析

油腔压力 P_r 常用低松弛因子迭代法求解, 即:

$$P_r^{(k+1)} = P_r^{(k)} + \omega^{(k)} (P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)}) \quad (9)$$

式中 $\omega^{(k)}$ 为低松弛因子, 常取常值 0.3、0.5 等. $\omega^{(k)}$ 的取值直接影响迭代次数的多少, 也就直接影响程序的计算速度。

实践证明, 常值低松弛因子迭代法虽可保证迭代收敛, 但迭代次数一般比较多; 而且相同的松弛因子在不同的具体条件下, 对迭代次数的影响是不同的。即使找到了对某具体情况较优的松弛因子, 它对其它情况却不一定最优, 有时甚至较差。而在求解动静压轴承静动特性的程序中, 与迭代有关的具体条件如 ϵ 、 θ 及 P_r 初始取值等却经常是变化的。因此, 常值低松弛因子不可能从根本上提高程序的计算速度。

本文作者曾试图在迭代过程中使 $\omega^{(k)}$ 在一定范围内变化, 以减少迭代次数, 但计算实践表明, 迭代过程难以产生对具体情况较优的自动变化的 $\omega^{(k)}$ 。一方面因为迭代过程本身难以判定哪一个 $\omega^{(k)}$ 较优, 另一方面难以使 $\omega^{(k)}$ 自动较优地变化。

与油腔压力 P_r 的迭代方法相同, $\partial P_r / \partial l$ 的迭代也常用低松弛因子迭代法。即:

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k+1)} = \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} + \omega^{(k)} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)} F^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l}\right)^{(k)}\right] \quad (10)$$

当然, 迭代过程的缺点也一样。

3.2 油腔压力 P_r 的快速迭代方法。

通过对动静压轴承油膜压力分布和 Q_{out} 具体计算式的分析。不妨设:

$$Q_{out} = K(\epsilon, \theta, \Lambda \dots), P_r + Q(\epsilon, \theta, \Lambda \dots) \quad (11)$$

其中, K 与 Q 和 P_r 无关, 但与轴承的结构及工况参数有关, Q 主要由速度项引起, 可直接从 Q_{out} 计算式中分离获得, K 则较难直接获得, 不妨迭代求出。

设第 $(k+1)$ 次迭代满足流量平衡方程:

$$\begin{aligned} Q_{in}^{(k+1)} &= Q_{out}^{(k+1)} \\ \text{即: } \alpha(P_s - P_r^{(k+1)}) &= K P_r^{(k+1)} + Q \\ \text{可得: } P_r^{(k+1)} &= (\alpha P_s - Q) / (\alpha + K) \end{aligned} \quad (12)$$

又对应于第 k 次迭代有:

$$\begin{aligned} Q_{out}^{(k)} &= \alpha(P_s - P_{rF}^{(k)}) = K P_r^{(k)} + Q \\ \text{得: } K &= [\alpha(P_s - P_{rF}^{(k)} - Q)] / P_r^{(k)} \end{aligned} \quad (13)$$

将 k 代入式 (12) 并化简, 可得油腔压力的迭代公式如下:

$$P_r^{(k+1)} = P_r^{(k)} + P_r^{(k)} / [(P_s - Q/\alpha) - (P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)})] (P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)}) \quad (14)$$

显然, 式 (14) 与低松弛因子式 (9) 在形式上类似, 相当于 $\omega^{(k)} = P_r^{(k)} / [(P_s - Q/\alpha) - (P_{rF}^{(k)} - P_r^{(k)})]$, 但本质上二者是不同的。式 (14) 直接由流量平衡方程得出, 其相当迭代因子反映了迭代具

体条件的影响, 具有明晰的物理含义。

计算实践表明, 迭代公式 (14) 具有迭代次数少、程序的计算速度快和对各种不同具体情况适应性强的特点。例如, 对许多不同结构与不同工况的动静压轴承, 在取不同的初始 P_r 值的条件下, 当 $\delta_i = \delta'_i = 0.001$ 时, 用式 (14) 一般迭代 3 次就达到收敛, 而取 $\omega^{(k)} = 0.5$ 的常值低松弛因子法迭代, 则迭代次数一般在 12 次左右。

3.3 油腔压力偏导 $\partial P_r / \partial l$ 的迭代

设 $\partial P_r / \partial l$ 的第 $(k+1)$ 次迭代满足偏导形式的流量的连续方程, 则有:

$$-\alpha \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k+1)} = \left[\frac{\partial (K P_r + Q + Q_v)}{\partial l} \right]^{(k+1)}$$

$$\text{可得} \quad \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k+1)} = - \left[P_r \frac{\partial K}{\partial l} + \frac{\partial (Q + Q_v)}{\partial l} \right] / (\alpha + K) \quad (15)$$

由 $\partial P / \partial l$ 的第 k 次迭代有

$$-\alpha \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} F^{(k)} = \left[\frac{\partial (K P_r + Q + Q_v)}{\partial l} \right]^{(k)}$$

$$\text{得:} \quad - \left[P_r \frac{\partial K}{\partial l} + \frac{\partial (Q + Q_v)}{\partial l} \right] = \alpha \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} F^{(k)} + K \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)}$$

代入式 (15) 有

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k+1)} = \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} + \frac{\alpha}{\alpha + K} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} \right] \quad (16)$$

若 K 直接由 $\partial P / \partial l$ 迭代得出, 则由第 k 和第 $k+1$ 次迭代可得如下迭代公式:

$$\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k+1)} = \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} + \frac{K}{1 - K} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} F^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} \right] \quad (17)$$

其中:

$$K' = \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} F^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k-1)} F^{(k-1)} \right] / \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k)} - \left(\frac{\partial P_r}{\partial l} \right)^{(k-1)} \right] \quad (17-a)$$

与 P_r 的迭代公式的分析一样, 式 (16) 或式 (17) 反映了问题的物理实质, 与一般的低松弛因子迭代法是完全不同的。

计算实践表明, 取 $\delta_i = \delta'_i = 0.001$ 时, $\partial P_r / \partial l$ 初值取为 0 时, 用公式 (16) 或 (17) 迭代, 一般 2 次或 3 次迭代就达到收敛, 而用 $\omega^{(k)} = 0.5$ 的常值低松弛因子迭代法, 则高达 17 次左右。

4 结论

(1) 建立的油腔压力及其偏导的迭代准则具有明确的流量平衡的意义。

(2) 建立的油腔压力及其偏导的迭代方法具有迭代次数少、对迭代的具体情况适应性强和反映流量平衡的实质的特点, 可以显著地提高毛细管节流的动静压轴承静动特性分析计算有限元程序的计算速度。

参考文献

- 1 孙恭寿, 冯明. 液体动静压混合轴承设计. 北京: 世界图书出版公司. 1993, 61-62
- 2 许尚贤. 液体静压和动静压滑动轴承设计. 南京: 东南大学出版社. 1989: 131~132, 242, 290~292
- 3 唐仲麟. 动静压轴承有限元直接解. 润滑与密封, 1984 (1): 20~24
- 4 邓圭玲. 几种型式的动静压轴承性能研究 [学位论文]. 西安: 西安交通大学, 1988