

## 截幅效应对 DMT 调制的影响及一种减小截幅噪声的方法\*

王瑛 唐朝京 魏急波

(国防科技大学电子技术系 长沙 410073)

**摘要** DMT (Discrete Multitone) 调制是一种在 ADSL (Asymmetrical Digital Subscriber Line) 中被广泛采用调制技术。本文分析了在 DMT 中对信号进行截幅所产生的影响, 计算了 D/A 变换产生的量化噪声和截幅噪声, 并与未截幅时相比较, 在不降低 SNR 的情况下, 降低了 D/A 变换器的精度的要求, 并求出最佳截幅因子。本文分析了一种减小截幅噪声的方法, 并说明在非最佳截幅时, 通过这种方法可获得与最佳截幅同样的结果。

**关键词** DMT 调制, 截幅效应与截幅因子, 量化噪声

**分类号** TN911. 3

## Chipping Effect in DMT and a Method to Reduce the Clipping Noise

Wang Ying Tang Chaojing Wei Jibo

(Department of Electronic Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** Discrete Multitone Modulation (DMT) has been widely chosen for Asymmetric Digital Subscriber Lines (ADSL). This Paper analyzes the effect of chipping in DMT-based transceivers and compute the chipping noise and the quantization noise produced by the D/A convertor. Compared with the no-chipping, the number of bits for D/A converter is reduced without the loss of SNR. This paper analyses a method to reduce the chipping noise and show that by this method we can get the same result under the not-optimum chipping as that under the optimum chipping.

**Key words** DMT, chipping effect and chipping factor, quantazation noise

ADSL 技术是提高现有双绞线传输能力的一种有效手段。1995 年美国国家标准协会制定了关于 ADSL 的标准 (ANSI T1. 413-1995), 其中对 ADSL 的在线调制建议采用 DMT 调制。所谓 DMT 调制是将整个信道分成  $N$  个子信道, 每个子信道分别进行 QAM 调制, 各个子信道调制后的信号相加后再发送。为了使传输效果最佳,  $N$  值一般很大。由于 QAM 调制时相位的随机性, 相加的和信号峰值有可能很大。这对后面的 D/A 变换器的精度和在线驱动器的范围提出很高的要求, 所以我们要在发送端对信号进行截幅。尽管会带来截幅噪声, 但由于信号的动态范围减小, D/A 变换器带来的量化噪声也会减小, 使总的信噪比保持不变, 或提高。本文分析了截幅效应对 ADSL 系统的影响, 并讨论了一种减小截幅噪声的方法。

## 1 DMT 调制的输出

DMT 调制系统框图如图 1 所示, DMT 调制后的信号经 D/A 转换再传送到信道, 在进行 D/A 转换的同时也对信号进行了限幅。在接收时, 要对信号进行 A/D 转换。DMT 调制后的信号  $A(t)$  可以看作是  $N$  个独立的 QAM 调制信号的和

$$A(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-}^{+} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ r_m^k e^{j 2\pi(k/T)t} u(t - mT) \right] \right\}$$

\* 1997 年 3 月 10 日收稿

第一作者: 王瑛, 女, 1973 年, 硕士生

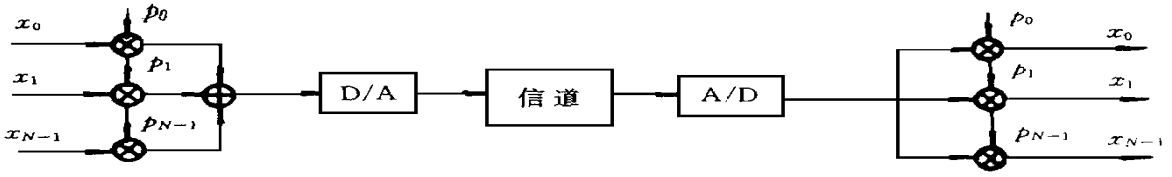


图 1 DMT 调制框图

上式中  $r_m^k$  指第  $k$  个子带中第  $m$  个符号,  $u(t)$  是周期为  $T$  锯齿波,  $\text{Re}$  表示取实部。当  $N$  值很大时,  $A(t)$  可看成高斯分布 (由中心极限定理), 均值为零, 方差为  $\sigma^2$ , 它的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

假设各个子信道使用相同点数的 QAM 星座图, 由文献 [1] 知道  $A(t)$  的最大值为

$$A_{\max} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \sigma \sqrt{\frac{L-1}{L+1}} \quad (2)$$

$L$  是星座图的点数。

## 2 截幅噪声和量化噪声的分布与幅度

调制后的信号, 经过 D/A 变换器和 A/D 变换器。当无截幅作用时, 信道的噪声总功率可认为由三部分组成  $N_1 = N_{1q} + N_{NEXT} + N_{\alpha}$ 。  $N_{1q}$  是无截幅时的量化噪声的功率,  $N_{NEXT}$  是信道的串音功率,  $N_{\alpha}$  信道中的其他噪声。

当进行截幅时, 噪声功率是:  $N_2 = N_{2q} + N_{dip} + N_{NEXT} + N_{\alpha}$ 。  $N_{2q}$  是截幅时的量化噪声功率,  $N_{dip}$  是截幅噪声功率。如果限制 DMT 信号的最大幅度为  $A_{clip}$ , 超出  $A_{clip}$  部分的信号功率即为截幅产生的噪声功率, 假设被截部分的信号功率均匀分布在整個频带内。用 (1) 式代入可求出为:

$$N_{dip} = 2 \int_{A_{clip}}^{\infty} (x - A_{clip})^2 p(x) dx = \sigma^2 \left[ -\frac{2}{\pi} u e^{-\frac{u^2}{2}} + (1 + u^2) \text{erfc}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (3)$$

式中  $u = A_{clip} / \sigma$ , 称为截幅因子。  $\text{erfc}(t)$  为误差函数:

$$\text{erfc}(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$N_{dip}$  可近似为<sup>[1]</sup>:

$$N_{dip} = 2 \frac{\sigma^2}{\pi} u^{-3} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(1 + \frac{6}{u^2}\right)^{-1} \quad (4)$$

假设 D/A 产生的量化噪声为  $Q$ , 量化台阶为  $a$ 。可认为系统均匀量化是量化噪声均匀分布在整個信号频带内。由文献 [4] 可求出:  $Q = a^2/12$ , 其中  $a = 2A/2^R$ , 这里  $R$  是 D/A 的量化精度,  $A$  是其动态范围。因为 A/D 也产生量化噪声, 所以整个系统的量化噪声为

$$N_q = 2Q = \frac{2A^2}{3 \cdot 2^{2R}} \quad (5)$$

## 3 截幅对系统的影响

文献 [1] 中主要分析截幅对 A/D-D/A 的量化精度的影响, 且只考虑了 D/A 引入的噪声。本文从截幅对 A/D-D/A 的量化精度和系统噪声这两个技术指标的影响来分析, 综合考虑 D/A 和 A/D 的影响。未截幅时量化精度为  $R_1$ , 动态范围是  $A_{\max}$ , 由式 (5) 可求  $N_{1q}$ 。截幅时量化精度为  $R_2$ , 动态范围是  $A_{clip}$ , 量化噪声  $N_{2q}$ 。由于截幅, 又引入截幅噪声  $N_{dip}$ 。若保持截幅前后系统 SNR 不变

$$\frac{S_1}{N_{1q} + N_{NEXT} + N_{\alpha}} = \frac{S_2}{N_{2q} + N_{dip} + N_{NEXT} + N_{\alpha}} \quad (6)$$

通常认为量化前后信号功率不变,  $s_1 = s_2$ 。因为截幅后量化噪声  $N_{2q}$  减小, 若  $N_{clip}$  相对很小, 要维持 (6) 成立, 必须降低量化精度  $R_2$ 。可见通过截幅, 能够在保持系统性能不变的情况下, 降低 A/D-D/A 的量化精度。将式 (3) (5) 代入 (6), 可求得

$$\Delta = R_1 - R_2 = 0.5 \log_2 \frac{2v^2}{2u^2 + 3 \cdot 2^{2R_2} \left( (1 + u^2) \operatorname{erfc} \left( \frac{u}{2} \right) - \frac{2}{\pi} u e^{-\frac{u^2}{2}} \right)}$$

其中  $u = A_{clip} / \sigma$ ,  $v = A_{clip} / \sigma$ 。  $\Delta$  与  $u$  的关系示于图 2 ( $L = 4, N = 256$ )。由图可看出, 每一条曲线开始都有  $\Delta = 0$ , 此时  $R_1 = R_2$ , 随着  $u$  的增大,  $\Delta$  迅速增大。每一条曲线都存在一点  $u$ , 使  $\Delta$  有最大值。我们称此点为最佳截幅因子  $u_{opt}$ 。如果选定  $u_{opt}$ , 则系统能节省最大 D/A 精度。随着  $u$  的增大 (过  $u_{opt}$  点后),  $\Delta$  逐渐减小。当  $\Delta$  再次为 0 时, 意味着  $A_{clip} = A_{max}$ , 此时  $N_{clip} = 0$ ,  $u$  的值 ( $u = 25.91$ ) 与  $R_2$  无关。只考虑截幅的影响, 我们不关心  $R_1$  与  $u_{opt}$  的关系, 讨论  $R_2$  与  $u_{opt}$  的关系。从图中也可看出, 随着  $R_2$  的增大,  $\Delta$  在减小。由此可见, 最佳截幅因子  $u_{opt}$  与量化精度有直接的关系。

如果我们从使系统噪声最小 (即  $N$  最小) 来推导也有相同  $u_{opt}$ 。这就证明了节省最大量化精度时, 恰是系统噪声最小时, 系统性能最佳。令  $\frac{\partial N_2}{\partial u} = 0$ , 若  $N_{NEXT}$  和  $N_{ot}$  与  $u$  无关, 代入式 (4) 式 (5) 化简可求得

$$R = 0.5 \log_2 \left( (u^3 + 6u) e^{u^2/2} \sqrt{2\pi/3} \right) \tag{7}$$

在给出量化精度时, 由式 (7) 可方便的求出  $u_{opt}$ , 图 3 表示最佳截幅因子与  $R_2$  的关系。与图 2 对照, 可看出两种情况下有相同的  $u_{opt}$  值。由最佳截幅因子, 可求出 D/A 变化的动态范围。由文献 [1] 只能得出  $u, R_1$  与  $\Delta$  的复杂表示式, 而无法直接得到  $u_{opt}$  与  $R_2$  的关系式。本文从使系统噪声最小的角度出发, 直接求出  $u_{opt}$  与  $R_2$  的关系式, 在实际中可较方便的应用。表 1 表示的是  $R_2$  为不同值时,  $u_{opt}$  与使  $\Delta = 0$  时  $u$  的值。

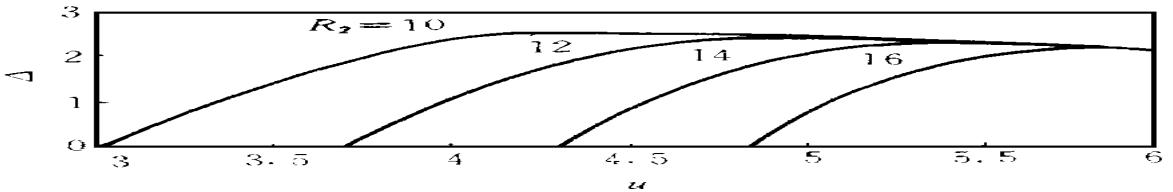


图 2 节省的精度与  $u$  的关系

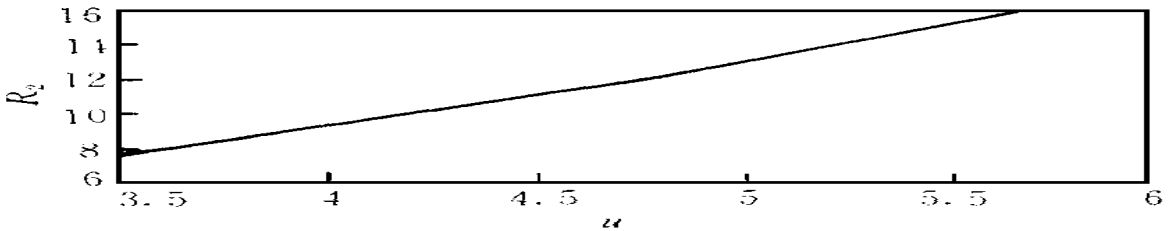


图 3 量化精度  $R_2$  与  $u_{opt}$  的关系

表 1 不同情况下  $u$  值、 $u_{opt}$  值

	$R_2 = 10$	$R_2 = 12$	$R_2 = 14$	$R_2 = 16$
$\Delta = 0$ 时 $u$	2.99	3.68	4.28	4.82
$\Delta$ 最大时 $u_{opt}$	4.38	4.87	5.36	5.81

#### 4 降低截幅噪声的方法

从上面分析可见, 尽管截幅会带来截幅噪声, 由于减小了量化噪声, 通过选取截幅因子可使系统

噪声最小, SNR 最大, 并得出在给定 D/A 精度情况下求最佳截幅因子的公式。如果我们想办法进一步减小截幅噪声, SNR 就会提高更多。文献 [3] 提出可以通过编码的方法来降低峰值/均值的大小, 但是这种方法要求数据的速率加快, 会导致在同样的输出功率的条件下, 每比特的传输功率减小, 降低通信系统处理信息的能力。文献 [2] 提出的一种方法可避免这种不利之处。

由上面的分析可知,  $A(t)$  可看成高斯分布, 则其超出 D/A 变换范围的功率是很小的。这样, 如果数据缓冲器延迟时间足够, 则在检测到 DMT 符号中的一个样值的幅度超过  $A_{clip}$  时, 删去此 DMT 符号, 并立刻改变每个 QAM 调制的相位 (相位由某一确定的产生随机相位的函数产生, 收端已知此函数), 会重新调制产生一个 DMT 数据。经过二次调制后, 超出  $A_{dip}$  的概率就更小了。DMT 符号中的一个采样超出  $A_{dip}$  的概率为

$$P = 2 \int_{A_{clip}}^{\infty} p(x) dx = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{A_{clip}}{2\sigma}\right) \quad (8)$$

其中  $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^t e^{-x^2} dx$ 。

假设每个 DMT 符号有  $2N$  个独立的样值, 则一个 DMT 符号首次被截幅的概率为

$$P_{dip1} = 1 - (1 - P)^{2N} \quad (9)$$

由于相位的随机性, 第二次被截幅的概率等于  $P_{dip1}$ , 连续两次被截幅的概率为

$$P_{dip} = P_{dip1} P_{dip2} = P_{clip1}^2$$

如果最多可  $k$  次才通过, 则  $P_{dip} = P_{dip1}^k$ 。可见, 随着  $k$  的增加, DMT 符号超过  $A_{clip}$  的概率几乎为零。图 4 示出  $k$  为 1、2、3 时,  $u$  值与发生截幅概率的关系。但并非  $k$  越大越好,  $k$  的大小受 IFFT 速度的限制, 在最多允许调制 2 次才通过时, IFFT 的速度不需提高两倍, 因为第一次被截幅的概率很小 ( $10^{-2}$ ), 只要 DMT 调制前端的缓存器延迟足够, IFFT 速度只需增加少量。

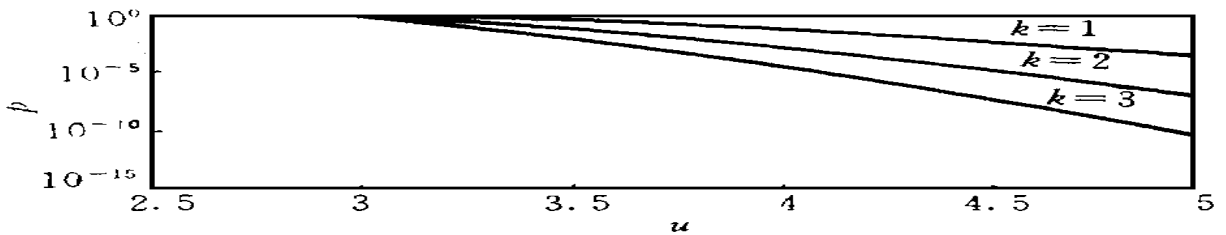


图 4 不同  $k$  值时  $u$  与截幅概率的关系

可求第二次通过时的概率密度为

$$P(x) = P_{dip1} P(x) \quad - A_{dip} < x < A_{clip}$$

由式 (4) 得到第一次截幅产生的噪声功率, 则可求出第二次调制的截幅噪声功率为

$$N_{clip2} = 2 \int_{A_{clip}}^{\infty} (x - A_{clip})^2 p(x) dx = P_{dip1} N_{dip1} \quad (10)$$

不截幅时  $A = A_{max}$ , 量化噪声为

$$N_{q1} = \frac{2}{3} 2^{-2R} A_{max}^2 \quad (11)$$

截幅时  $A = A_{dip}$ , 量化噪声为

$$N_{q2} = \frac{2}{3} 2^{-2R} A_{dip}^2 \quad (12)$$

假设其他噪声  $\text{Noise} = \alpha N_{q1}$ 。所以, 当  $k=0$  时, 代入 (11), 总的噪声功率

$$N_{k=0} = N_{q1} + \text{Noise} = (1 + \alpha) N_{q1}$$

当  $k=1$  时, 总的噪声功率

$$N_{k=1} = N_{q2} + \text{Noise} + N_{dip1} = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \alpha\right) N_{q1} + N_{dip1}$$

当  $k=2$  时, 总的噪声功率

$$N_{k=2} = N_{q2} + \text{Noise} + N_{dip2} = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \alpha\right) N_{q1} + N_{dip2}$$

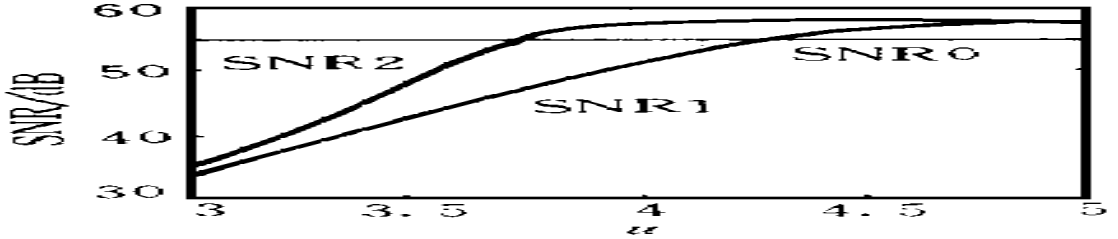


图5  $k=0, 1, 2$  时的 SNR ( $R=14, \alpha=1$ )

图5是对应不同情况时信道的信噪比, 进行两次调制比一次调制时的 SNR 有明显提高, 提高量最大的点 (大约 8db), 靠近  $SNR2=SNR0$  处。这种方法要求对重复调制的相位收发双方为已知, 而且在导频中要有  $\log_2 k$  个比特通知收方是第  $k$  次通过。实际上这种控制信息的比特数对实际数据速率是可以忽略的。由表1的结果, 在  $R=14$  时,  $u_{opt}=5.36$ , 图中看出此时  $SNR1 > SNR2$ , 所以这时采用重复调制并没有多大意义。但  $u=4.2$  时,  $SNR2$  已接近最大值, 所以在非最佳截幅时采用这种方法, 可实现近似最佳 SNR。采用这种方法, 可在不降低 SNR 并无需提高实际传输速率的情况下, 降低信号幅度, 减小截幅噪声, 降低对 D/A 和 A/D 动态范围的要求。

## 5 结论

截幅效应对 DMT 调制的影响是明显的。在给定 D/A 转换器量化精度时, 可以求出最佳截幅因子, 继而求出 D/A 的动态范围。此时在其他条件固定的情况下, 系统性能最佳, 系统噪声最小。在同样条件下, 若截幅前检测 DMT 数据的大小超限, 则重复调制, 可减小截幅噪声。通过这种方法, 不需提高数据速率, 并在  $u$  小于最佳截幅因子时, 也能接近最佳性能, 从而降低了 D/A 和 A/D 的动态范围。由此可见, 降低 D/A 和 A/D 的要求是以增加调制的复杂程度为代价的。

## 参考文献

- 1 Denis J G Analysis of Clipping Effect in DMT-based ADSL Systems, ICC '94.
- 2 Denis J G. A Method to Reduce the Probability of Clipping in DMT-based Transceivers. IEE Trans. on Commun. V. 44, Oct, 1996
- 3 M. Friese. Multicarrier modulation with low peak-to-average power ratio. Electronics Letter, Apr. 1996
- 4 A. V. 奥本海姆, R. W. 谢弗. 数字信号处理, 北京: 科学技术出版社, 1980