国 防 科 技 大 学 学 报
第 20 卷 第 5 期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 20 No. 5 1998

战役优势参数及其应用研究*

黄俊　武哲　朱荣昌

(北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系　北京　100083)

摘　要　数学分析方法在军事行动计划中扮演着越来越显著的角色。对以兰彻斯特作战模型为基础的描述诸兵种合成作战的矩阵微分方程, 以及由方程的控制矩阵和状态变量初值, 在不解方程的情况下导出的战役优势参数进行了研究; 以空战为例讨论了预测战役结局、辅助军事决策、优化兵力部署和规划火力分配等战役优势参数的主要应用; 给出了对战役优势参数和数学模型的评价。

关键词　作战模拟　诸兵种合成作战　战役优势　应用研究

分类号　O212. 1: E824

A Study on Campaign Superiority Parameter and Its Applications

Huang Jun Wu Zhe Zhu Rongchang

(Department of Aircraft Design&Applied Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing: 100083)

Abstract　The mathematical methods of analysis play an increasingly significant role in planning military operations. The matrix differential equations educed on the basis of Lanchester combat models for describing the heterogeneous force combat engagements were studied. An investigation was conducted on the campaign superiority parameter derived directly from the control matrix and the initial value of the state variables without solving the equations. Battle outcome prediction, military decision support, force deployment optimization and fire allocation programming have been discussed with an air-combat example to demonstrate the important applications of the campaign superiority parameter. Evaluation of superiority parameter as well as Lanchester equations is presented in the conclusion.

Key words　combat simulation, heterogeneous force combat engagements, campaign superiority, application research

---

数学分析方法在计划军事行动和确定现有武器的最优使用来保证国家安全方面起着越来越重要的作用[1]。作为军事运筹、军事预测、军事系统工程和军事指挥控制系统等军事科学研究的基础, 描述战役 (这里包含了严格意义的"战役"和"战斗") 的数学模型受到广泛的重视[2][3][4][5]。兰彻斯特方程是迄今为止最著名和实用作战模型之一。1916 年, 兰彻斯特就提出了空战的数学模型, 从此这些模型成为研究作战理论和计算战斗中兵力损耗的基础[1]。在军事行动的决策过程中, 指挥官必须先考虑任务成功概率、风险级别、确定可以接受什么样的风险, 再作出正确的决定, 战役优势参数为此提供了一个方便有效的测度。

1　作战模型

兰彻斯特作战模型分为确定型和概率型两类。确定型有直接射击模型 (平方律)、区域射击模型 (线性律) 以及由此发展而来的游击战 (混合律)、自动射击 (对数律)、几何平均 (线性律)、Helmbold (规模效应) 和自动/直接射击等模型。本文主要讨论直接射击模型。设红军和蓝军为两个相互冲突的作战部队, 其兵力 (人员或武器) 分别有用 $R(t)$ 和 $B(t)$ 表示, 于是确定型兰彻斯特方程可表示如

---

* 1998 年 4 月 25 收稿
第一作者: 黄　俊, 男, 1964 年生, 博士生

下[3]:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} &= -a_{RS}R(t) - a_B B(t)\\ \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} &= -a_{BS}B(t) - a_R R(t)\end{aligned} \tag{1}$$

式中a_{RS}，a_{BS}分别为红军和蓝军的自损系数，a_R，a_B分别为红军和蓝军给对方造成的损耗系数。方程(1)的适用范围：两军性质相同、在武器射程内射击、双方C^3系统工作出色有效、火力均布于生存目标间。如果忽略自损，式(1)可简化成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} &= -a_B B(t)\\ \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} &= -a_R R(t)\end{aligned} \tag{2}$$

现代战争一般为多兵种协同作战，即使是相同兵种，如参战部队的装备和质量不同，自己的损耗和给敌人造成的损耗是有差别的，这就是诸兵种合成作战模型讨论的问题。设红军r个兵种和蓝军b个兵种交战，类似地可得诸兵种合成作战矩阵微分方程[1]

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{CX} \tag{3}$$

式中$\boldsymbol{X}=\{x_1, x_2, \cdots, x_{r+b}\} = \{R_1, R_2, \cdots, R_r, B_1, B_2, \cdots, B_b\}$且$x_k>0$，$(k=1, 2, \cdots, r+b)$是红、蓝方兵力为元素构成的列矢量，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & -\boldsymbol{A}_B\\ -\boldsymbol{A}_R & 0\end{bmatrix}$为$r+b$阶方阵，其中

$$\boldsymbol{A}_R=\begin{bmatrix}A_{R(r+1)1} & A_{R(r+1)2} & \cdots & A_{R(r+1)r}\\ A_{R(r+2)1} & A_{R(r+2)2} & \cdots & A_{R(r+2)r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{R(r+b)1} & A_{R(r+b)2} & \cdots & A_{R(r+b)r}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_R=\begin{bmatrix}A_{B1(r+1)} & A_{B1(r+2)} & \cdots & A_{B1(r+b)}\\ A_{B2(r+1)} & A_{B2(r+2)} & \cdots & A_{B2(r+b)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{Br(r+1)} & A_{Br(r+2)} & \cdots & A_{Br(r+b)}\end{bmatrix}$$

其中$A_{Rij}\geq 0$和$A_{Bij}\geq 0$ $(i=1, 2, \cdots, r,\ j=r+1, r+2, \cdots, r+b)$分别为红、蓝军各兵种的给对方造成的损耗系数，第一个下标代表受损者。损耗系数由下式计算

$$A_{Rji} = a_{Rji}\alpha_{Rji} \qquad A_{Bij} = a_{Bij}\alpha_{Bij} \tag{4}$$

a_{Rji} (a_{Bij}) 为当红（蓝）军某一兵种仅与蓝（红）方某一兵种交战时，蓝（红）方作战单位的固有损耗率，α_{Rji} (α_{Bij}) 为红（蓝）军某一兵种的武器（或人员）分配比例因子，并有$0\leq\alpha_{Rji}$ (α_{Bij}) ≤ 1，$\sum_j \alpha_{Rji}\leq 1$和$\sum_i \alpha_{Bij}\leq 1$。

2　战役优势参数

2.1　单兵种战斗优势参数

由(2)分离变量得

$$a_R R(t)\,\mathrm{d}R(t) = a_B B(t)\,\mathrm{d}B(t) \tag{5}$$

两边分别从0到t积分，代入$t=0$时的初始条件R_0，B_0得

$$a_R[R_0^2 - R^2(t)] = a_B[B_0^2 - B^2(t)] \tag{6}$$

这就是兰彻斯特平方律，令

$$\varphi_0 = \frac{R_0}{B_0}\sqrt{\frac{a_R}{a_B}} \tag{7}$$

为红军相对于蓝军的优势参数。显然，当某一时刻$R(t)$和$B(t)$同时为零时，$\varphi_0=1$，两军等势；$\varphi_0>1$时红军占优。

2.2　诸兵种合成战役优势参数

利用约当标准形求解微分方程组(3)得:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}[\exp(\lambda t)\boldsymbol{D}]\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}_0 \tag{8}$$

式中$\boldsymbol{X}_0$为变量初值，λ为系数矩阵$\boldsymbol{C}$的特征值，$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}^{(1)}\ \boldsymbol{p}^{(2)}\cdots\boldsymbol{p}^{(i)}\cdots]$为广义特征矢量矩阵，$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}^{(1)}\ \boldsymbol{q}^{(2)}\cdots\boldsymbol{q}^{(i)}\cdots]=(\boldsymbol{p}^{-1})^T$，

$$\boldsymbol{D}^{(i)}=\boldsymbol{I}+\frac{\lambda^{(i)}t}{1!}\boldsymbol{H}+\frac{(\lambda^{(i)}t)^2}{2!}\boldsymbol{H}^2+\cdots+\frac{(\lambda^{(i)}t)^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{H}^{k-1} \tag{9}$$

k为λ的重数，$\boldsymbol{H}$为幂零矩阵($\boldsymbol{H}^k=\boldsymbol{O}$)[6]。根据$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$可得：$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{C}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}^T$，也就是$\boldsymbol{Q}$为$\boldsymbol{C}$的广义左特征矢量矩阵。由$\boldsymbol{q}_i$和$\boldsymbol{p}_j$正交，即

$$\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{p}_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{10}$$

通过最大特征值λ_1对应的左主特征矢量$\boldsymbol{q}_1$，可导出微分方程组(3)解的支配项[1]。

$$[\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{X}]_{t=0}=[\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{P}[\exp(\lambda t)\boldsymbol{D}]\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}_0]_{t=0}=\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{X}_0 \tag{11}$$

$\boldsymbol{q}_1$可直接由下式求出：

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1 \tag{12}$$

把$\boldsymbol{q}_1$写成

$$\boldsymbol{q}_1=\{c_1\boldsymbol{v}_1\ c_2\boldsymbol{w}_1\} \tag{13}$$

$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{w}_1$分别为对应$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{B}$的列矢量，c_1，c_2为常数乘子。将(13)代入(12)得

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{A}_R^Tc_2\boldsymbol{w}_1&=\lambda_1c_1\boldsymbol{v}_1\\ -\boldsymbol{A}_B^Tc_1\boldsymbol{v}_1&=\lambda_1c_2\boldsymbol{w}_1\end{aligned} \tag{14}$$

由于$\boldsymbol{A}_R$和$\boldsymbol{A}_B$中的元素非负，$\boldsymbol{C}$有非负的实最大特征值[1]，故取$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{w}_1$的元素非负。把方程(14)中的两式两端取逆，然后分别右乘$\boldsymbol{e}=\{1\quad 1\quad\cdots\quad 1\}$可得

$$\frac{c_2}{c_1}=-\left(\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{e}}\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{e}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

这里的负号表示与(14)相符。由(13)、(15)并注意到$\boldsymbol{X}_0=\{\boldsymbol{R}_0\quad\boldsymbol{B}_0\}$推导出

$$\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{X}_0=c_1\left[\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{R}_0-\left(\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{e}}\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{e}}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{B}_0\right] \tag{16}$$

为方便取$c_1=1$，很明显，标量$\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{X}_0$代表红、蓝军集成兵力之差，可以将其作为诸兵种合成战役优势的一个评估测度。用$c_1\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{R}_0$将(16)正规化得无量纲优势参数

$$S_0=1-\left(\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{e}}\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{e}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{B}_0}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{R}_0} \tag{17}$$

令$S_0=1-\Phi_0^{-1}$，得

$$\Phi_0=\left(\frac{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{e}}\frac{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{e}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{B}_0}{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{R}_0} \tag{17}$$

从方程(17)、(18)知，S_0，Φ_0独立于$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{w}_1$的任意乘子c_1，c_2。$S_0=0$或$\Phi_0=1.0$时，表示红军和蓝军的战役优势相等；$0<S_0<1.0$或$1.0<\Phi_0<\infty$时，表示红军具有比蓝军大的战役优势，即蓝军处于劣势地位。

3 战役优势参数的应用

3.1 预测战役结局

战役优势参数的应用之一是在不求解控制微分方程的条件下预测战役的结局。图1为一个“2对2”空战(两种型号飞机对敌人两种不同型号飞机)的例子，已知红蓝军4种飞机的空战效能指数分别为14.4，9.1，17.2和12.6以及参战架数$\boldsymbol{X}_0=\{72\quad 200\quad 60\quad 149\}$。根据飞机的战效和战斗中敌我之间随机选取进攻目标计算损耗系数得

$$A_B = \begin{bmatrix} 0.00263 & 0.00478 \\ 0.00417 & 0.00756 \end{bmatrix}$$ 和

$$A_R = \begin{bmatrix} 0.00288 & 0.00505 \\ 0.00393 & 0.00689 \end{bmatrix}。$$

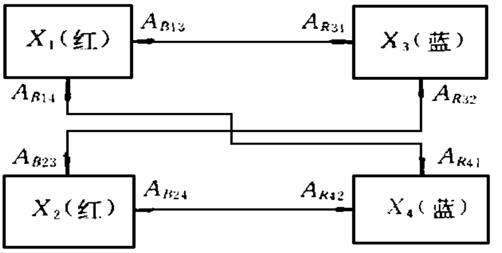

图 1 二对二交战框图

计算出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 $\lambda_1 = 0.00997$，对应的左主特征矢量 $\boldsymbol{q}_1 = \{-0.3712 \quad -0.6507 \quad 0.3694 \quad 0.6713\}$。由(18)得 $\Phi_0 = 1.284$，红军占优势，空战结局为蓝军失败。

3.2 辅助军事决策

大多数战役并不是战斗到某一方被完全消灭才告结束，而是在伤亡达到一定的程度便停火以避免更大的伤亡。一些军事策划家认为攻方损失30%的兵力或守方遭受50%的死伤时交战终止，先达到上述水平的即为败方。决策者通过优势参数可预测战争的风险级别，从而决定是否采取军事行动。看图1示意的空战模型，红军为进攻方，若 $\Phi_0 = 1.284$，当蓝军兵力损失超过50%而战败时，红军剩余兵力仍大于73%，到战斗终止前各型飞机的数量变化见图2。这时红军作出进攻决策是合理的，一般地，按照上述准则攻方要具有 $\Phi_0 \geq 1.25$ 的战役优势时才能开战，否则已方将冒较大的风险。

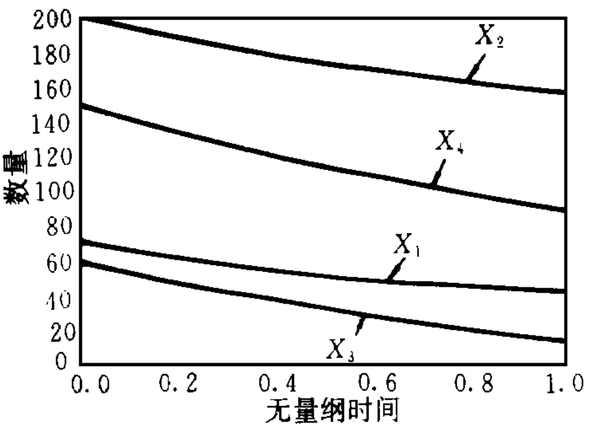

图 2 空战中飞机数量的变化情况

3.3 优化兵力部署或武器装备

针对可能敌人的军队和装备以及我方的具体情况，有机地配置各种部队，使相对敌人的战役优势达到最大。已知蓝军各兵种兵力数量和质量，设红军各兵种兵力为 $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，可以把方程(18)写成 $\Phi_0 = h(\boldsymbol{X})$。优化问题为在给定约束条件 $g_j(\boldsymbol{X}) \geq 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 下最大化目标函数 $\Phi_0 = h(\boldsymbol{X})$，$g_j(\boldsymbol{X}) \geq 0$ 是一个广义表达式，包含了各种显式和隐式的等式及不等式约束。令 $f(\boldsymbol{X}) = -h(\boldsymbol{X})$，优化模型可表示为

$$\begin{gathered} \min_{x \in \boldsymbol{D}} f(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{D} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{X} \quad g_j(\boldsymbol{X}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)\} \end{gathered} \tag{19}$$

$\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$ 为问题的可行域，$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$ 为问题的可行解。优化过程的目的是寻找一个 $\boldsymbol{X}^* \in \boldsymbol{D}$，对所有的 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$ 均有 $f(\boldsymbol{X}) \geq f(\boldsymbol{X}^*)$。该 $\boldsymbol{X}^*$ 就是问题的全局最优解。以图1的模型来讨论武器装备规划，设约束条件为

$$\begin{gathered} 50 \leq x_1 \leq 250 \\ 50 \leq x_2 \leq 250 \\ x_1 + x_2 \leq 300 \\ 0.74x_1 + 0.42x_2 \leq F \end{gathered} \tag{20}$$

可得 $F = 150$ 时，$\boldsymbol{X}^* = (50 \quad 200)$，$\Phi_0 = 1.1711$；$F = 155$ 时，$\boldsymbol{X}^* = (96 \quad 200)$，$\Phi_0 = 1.5517$；$F = 160$ 时，$\boldsymbol{X}^* = (188 \quad 50)$，$\Phi_0 = 1.5519$。显然第二种配置具有最大的效费比。

3.4 规划火力分配

火力分配对战斗结局有重要影响，分配比例因子的选取应保证最大限度地杀伤敌人[7][8]。红军相对于蓝军的战役优势高意味着战斗中将给蓝军造成大的损耗。当两军的参战兵力和蓝军的战术确定时，战役优势参数可作为目标函数对 α_{Rji} (α_{Bij}) 进行非线性规划，寻求最佳火力分配策略。然而战术应用是十分灵活的，交战双方都对自己的战术严格保密，对进攻火力分配的优化不具实用价值。可以用对策论来解决攻防战术问题，使双方均达到满意的结果。

4 结 语

(1) 对照式 (7) 和式 (18)，用损耗系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的左主特征矢量左乘多兵种合成作战控制方程解矢量作为评估双方兵力的测度导出的战役优势参数 Φ_0，与单兵种战斗优势参数 Φ_0 非常相似，均正比于兵力的数量和兵力质量的平方根，说明 Φ_0 是一个恰当反映战役实质的参数。

(2) 通过对几个应用实例的讨论，战役优势参数在军事运筹领域扮演着重要角色。

(3) 由于对线性系统解的稳定性分析存在困难，多兵种合成战斗模型假定兵力的损耗系数与时间相独立，也没有考虑人的因素；另外，必须做到知已知彼才能进行有效的分析，所以战斗模型暨战役优势参数的应用受到一定的限制。

参考文献

1 Przemieniecki J S. Mathematical Methods in Defense Analyses. New York: AIAA Inc, 1994. 205～352

2 郭俊义. 军事系统工程. 北京：国防大学出版社，1989

3 吴枕江，刘雨. 指挥控制系统分析概论. 长沙：国防科技大学出版社，1992

4 朱松春，张树义，韩春立，周容. 军事运筹学. 北京：解放军出版社，1988

5 肖显社，王益民，刘继贤. 军事预测学. 北京：国防大学出版社，1990

6 丁同仁，李承治. 常微分方程教程. 北京：高等教育出版社，1991

7 沙基昌. Lanchester 方程与火力指数的内在联系. 国防科技大学学报，1990，12 (3)：8～13

8 沙基昌. 作战指数与火力分配统一处理的方法和意义——兼论数理战术学. 国防科技大学学报，1993，15 (4)：60～65