

幂硬化材料的无限体内部椭圆裂纹的近似解*

唐国金 袁杰红 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 采用能量法,巧妙地导出了裂纹面上作用着均匀压力、幂硬化材料的无限体内部椭圆裂纹的全塑性 J 积分解,该解的形式为简单的解析式,其解法基于 HRR 解^[1,2]。

关键词 断裂, J 积分, 幂硬化材料

分类号 O344.3

Approximate Solution of the Infinite Body with an Embedded Elliptic Crack of Power Hardening Material

Tang Guojin Yuan Jiehong Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The fully plastic J -integral of the embedded elliptic crack, on which the uniform pressure is exerted, in the infinite body of power hardening material is derived cleverly by use of energy method in this paper. The fully plastic J -integral is a simple analytic form. The solving process is based on the solution of HRR^[1,2].

Key words fracture, J -integral, power hardening material

用 J 积分描述延性材料在大范围屈服条件下的裂纹开裂是众所公认的方法。然而,求解未穿透裂纹的 J 积分却是一个难题,它一般涉及到求解一个复杂的弹塑性边值问题。Shih 和 Hutchinson^[3,4]、Bucci 等^[5]以及 Rice^[6]提出了一种弹塑性估算方法:假定材料的单轴拉伸性能服从 Ramberg-Dsgood 应力应变关系:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{\sigma}{\sigma_s} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n \quad (1)$$

其中 α 为比例因子, n 为硬化指数, σ_s 为屈服应力, ϵ_s 为屈服应变, 它们是材料常数。分别求出问题的线弹性解和全塑性解, 然后, 在两解之间以适当方式内插以一个估算弹塑性解。线弹性解已有现成的结果。有文献给出了常见二维裂纹体的全塑性有限元解, 但还没有见到有人给出三维问题的全塑性解来。本文采用能量法, 巧妙地导出了裂纹面上作用着均匀压力、幂硬化材料的无限体内部椭圆裂纹的全塑性 J 积分解, 将它与现有的线弹性解结合起来, 可以给出无限体内部椭圆裂纹弹塑性解的工程近似公式, 引入前后表面修正系数后, 可得三维表面裂纹问题的弹塑性近似解。

1 全塑性 J 积分沿裂纹前沿的分布规律

如图 1 所示裂纹体, 其材料的单轴本构关系为:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n \quad (2)$$

Hutchinson^[1]、Rice 和 Rosengren^[2]的研究表明, 相应于 (2) 的型裂纹尖端的应力、应变和位移的渐近表达式为:

* 国家自然科学基金项目资助

1998年4月22日收稿

第一作者: 唐国金, 男, 1963年生, 副教授

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_s \left(\frac{EJ}{\sigma_s^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \quad (3a)$$

$$\epsilon_{ij}(r, \theta) = \epsilon_s \alpha \left(\frac{EJ}{\sigma_s^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \quad (3b)$$

$$u_i(r, \theta) = \epsilon_s \alpha \left(\frac{EJ}{\sigma_s^2 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta) \quad (3c)$$

其中: I_n 为引进的无量纲因子, 以便使 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ 、 $\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_i(\theta)$ 各项的最大值为 1。

不妨从以下两个前提出发进行推导:

(1) 裂纹体在载荷 p 的作用下, 裂纹面沿 y 向张开, 椭圆裂纹面成为一空间腔体, 由 (3c) 和线弹性情形结论, 不妨设空间腔的方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^{n+1}}{\eta_0^{n+1}} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

其中: η_0 为椭圆中心点的 y 向位移值, n 为材料硬化指数。

(2) 在利用能量法建立方程时, 假定初始椭圆裂纹的长、短半轴分别为 $c = (1-f)c$ 、 $a = (1-f)a$ (其中 f 为微量), 并假定裂纹做如下虚扩展: 虚扩展后, 椭圆长、短轴分别为 c 、 a (如图 2 所示)。

在图 2 中, 因为 $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}$, 所以, 外椭圆和内椭圆可以用同一个椭圆参数角 φ 来表示其参数方程。设想椭圆参数角从 φ 变到 $\varphi + d\varphi$, P_1 和 P_2 分别是内、外椭圆对应于 φ 的点, Q_1 和 Q_2 分别是内、外椭圆对应于 $\varphi + d\varphi$ 的点, P_3 为 P_2 点外椭圆的法线与内椭圆的交点。

将内椭圆参数方程 $x = a(1-f)\sin\varphi$, $z = c(1-f)\cos\varphi$ 代入空腔几何方程 (4), 略去高阶微量, 可得 P_1 点的 y 向位移为:

$$w = y = \eta_0 (2f)^{\frac{1}{n+1}} \quad (5)$$

又令 $\overline{P_2 P_3} = r$, 则曲四边形 $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ 的面积为:

$$dA = r ds = r \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

$$\text{即 } dA = r \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

又从几何上可以证明^[8]:

$$dA = f a c d\varphi$$

故

$$f = \frac{r}{ac} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi} \quad (6)$$

另一方面, 在 (3c) 中, 令 $\theta = \pi$ 可得:

$$J = \frac{I_n \sigma_s^2 \left(\frac{u_y}{\alpha \epsilon_s} \right)^{\frac{n+1}{n}}}{E \left(\frac{1}{r^n} \right)} \quad (7)$$

联立 (5)、(6)、(7), 可得:

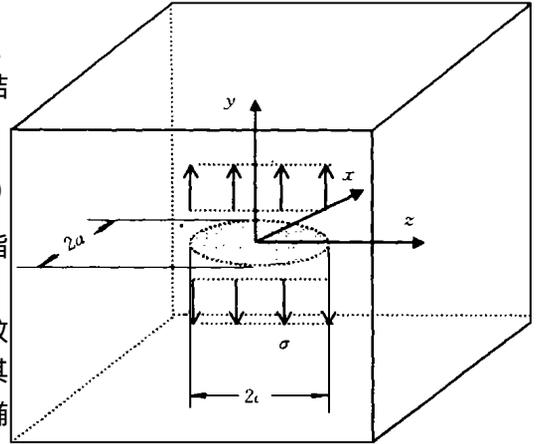


图 1 无限体内埋椭圆裂纹几何与载荷

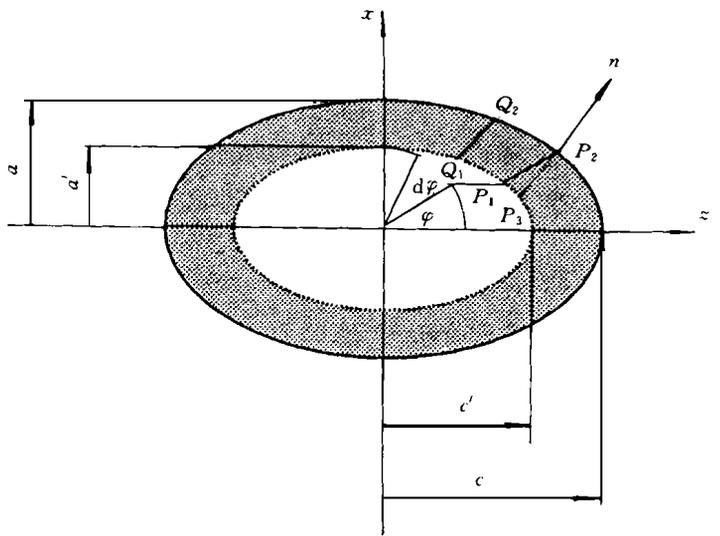


图 2 椭圆形裂纹的虚扩展

$$J = \frac{I_n \sigma_s^2}{E} \left(\frac{2}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\eta_0}{\alpha \epsilon} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\sin^2 \varphi_+ + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (8)$$

式 (8) 给出了全塑性 J 积分沿裂纹前沿的分布规律, 只要知道 η_0 的大小, 实质上便得到了全塑性 J 积分的近似解。

2 用虚功原理确定 η_0

假设在上述虚扩展中, 没有卸载发生, 于是, 所要求的全塑性 J 积分实质上是对应 (2) 的非弹性 J 积分, 因此, 可以大胆地应用弹性应变能的概念和虚功原理。

由 J 积分的定义, 知

$$J = \left(\frac{d\Pi}{dA} \right)_p \quad (\Pi \text{ 为系统势能})$$

即

$$d\Pi = J dA = J a c f d\varphi$$

所以, 在以上给定的虚扩展过程中, 裂纹体的势能增量为:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \int_0^{2\pi} J a c f d\varphi \\ &= a c f \frac{I_n \sigma_s^2}{E} \left(\frac{2}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\eta_0}{\alpha \epsilon} \right)^{\frac{n+1}{n}} \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \varphi_+ + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2n}} d\varphi \\ &= 4 a c f \frac{I_n \sigma_s^2}{E} \left(\frac{2}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\eta_0}{\alpha \epsilon} \right)^{\frac{n+1}{n}} F_n(k) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{其中: } F_n(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2n}} d\varphi, k = \frac{a}{c}$$

另一方面, 按系统势能的定义和 (2) 式, 有:

$$\Pi = \sigma V - \frac{n}{n+1} \sigma V = \frac{1}{n+1} \sigma V \quad (10)$$

其中: V 为裂纹内腔的体积。

用初等微积分, 可推出:

$$V = \frac{2(n+1)}{n+2} \pi a c \eta_0$$

$$\Delta V = \frac{6(n+1)}{n+2} \pi a c \eta_0 f$$

所以

$$\Delta\Pi = \frac{1}{n+1} \sigma \Delta V = \frac{6\sigma}{n+2} \pi a c f \eta_0 \quad (11)$$

联立 (9)、(11), 求出 η_0 后, 代入 (8) 式, 得全塑性 J 积分的精确解:

$$J = \frac{1}{2} I_n \alpha \epsilon \sigma_s \left[\frac{3\pi \alpha}{2(n+2) I_n F_n(k)} \frac{\sigma}{\sigma_s} \right]^{n+1} \left(\sin^2 \varphi_+ + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (12)$$

参考文献

- 1 Hutchinson J W. Singular behavior at end of tensile crack in hardening material. J. Mech. Phys. Solid, 1968, 16: 13 ~ 31
- 2 Rice J R, Rosengren G F. Plane strain deformation near tip in power-law hardening material. J. Mech. Phys. Solid, 1968, 16: 1 ~ 31
- 3 Shih C F. J-integral estimates for strain hardening material in antiplane shear using fully plastic solution. ASTM Special Technology Publication 590, 1976: 3 ~ 22
- 4 Shih C F, Hutchinson J W. Fully plastic solution and large-scale yielding estimates for plane stress crack problems. Trans. of ASTM, J. of Eng. Materials and Technology, 1976, 98: 289 ~ 295
- 5 Bucci R J, Paris P C. J-integral Estimation Procedure in Fracture Toughness ASTM Special Publication 514, 1972: 40 ~ 69
- 6 Rice J R. Some further results on J-integral analysis and estimates. ASTM Special Publication 536, 1973: 231 ~ 245