

## 二维 Root-MUSIC\*

刘全 皇甫堪 陈建文

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

**摘要** 将一维 Root-MUSIC 推广到二维,从而得到了一种新的二维方向估计方法,它具有计算量小的优点。

**关键词** 方向估计, Root-MUSIC

**分类号** TN911.7

## 2-D Root-MUSIC

Liu Quan Huangfu Kan Chen Jianwen

(Institute of Electronic Engineering, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In the paper, 1-D Root-MUSIC is generalized to 2-D case which utilizes 1-D Root-MUSIC, and the new 2-D DOA estimation method has the advantage of low computation cost.

**Key words** DOA estimation, Root-MUSIC

在实际应用中,经常需要对目标的方位进行估计,因此人们提出了各种方向估计的方法,如 Schmidt 提出的 MUSIC<sup>[1]</sup>, Roy 提出的 ESPRIT<sup>[2]</sup>, Barabell 的 Root-MUSIC<sup>[3]</sup>等都是其中的经典算法。这些方法最初均是针对一维方向估计,但近年来随着二维方向估计重要性的日益提高,也发展了各种二维方向估计的方法,例如, MUSIC 可以简单推广到二维,但二维 MUSIC 有一个致命的弱点,就是需要进行二维方向搜索,计算量太大,如果没有一个好的初始值,很难用于实际。ESPRIT 计算量小,估计效果好,但本质上只能用于一维估计。Root-MUSIC 计算量小,但在以前的文献中,认为只能适用于一维估计,因此很有必要发展新的二维估计方法。

本文将一维 Root-MUSIC 推广到二维,从而以较小的计算量获得二维方向的估计。

本文使用下面这些符号: H 表示共轭转置, \* 表示共轭, T 表示转置,  $\perp$  表示向量正交。

## 1 一维 Root-MUSIC

如图 1 所示,假设一均匀线阵有 M 个各向同性阵元,有 P(P < M) 个互不相干的远场窄带平面波信号入射到此阵列上,入射方向分别为  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P\}$ , 噪声为互不相关的高斯白噪声,与信号源不相关,方差为  $\sigma^2$ , 则第 i 个阵元的观测信号为

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^P s_k(t) e^{-j\omega_0(i-1)d \sin \theta_k / c} + n_i(t)$$

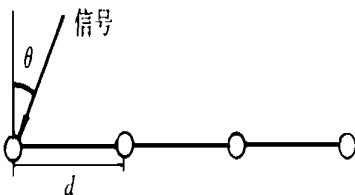
图 1

其中  $s_k(t)$  为信号的包络, d 为阵元间距,  $\omega_0$  为信号中心频率, c 为信号的传播速率,  $n_i(t)$  为第 i 个阵元上的噪声。

将上式写成向量形式:

$$X(t) = AS(t) + n(t)$$

\* 1998 年 3 月 28 日收稿  
第一作者: 刘全, 男, 1971 年生, 博士生



其中  $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$ ,  $S(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_M(t)]^T$   
 $n(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_M(t)]^T$ ,  $A = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_P)]$   
 $a(\theta_i) = [1 \ e^{-jq_0\tau_i} \ \dots \ e^{-jq_0(M-1)\tau_i}]^T$ ,  $\tau_i = d \sin\theta_i / c$

可求出观测信号的自相关为:

$$R_{XX} = E[XX^H] = AR_sA^H + \sigma^2 I$$

其中  $R_{SS} = E[SS^H]$  为信号的自相关阵。

那么  $R_{XX}$  的特征值  $u_i$  和相应的特征向量  $v_i$  满足下面的式子(设  $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_M$ ):

- 1)  $u_{P+1} = u_{P+2} = \dots = u_M = \sigma^2$
- 2)  $\{v_{P+1} \ v_{P+2} \ \dots \ v_M\} = \{a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_P)\}$

由上面的式子可知:

$$a^H(\theta_i) \left[ \begin{matrix} M \\ j=P+1 \end{matrix} v_j v_j^H \right] a(\theta) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, P \tag{1}$$

若令 
$$D(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \left[ \begin{matrix} M \\ j=P+1 \end{matrix} v_j v_j^H \right] a(\theta)}$$

则可知在  $\theta$  处  $D(\theta)$  理论上为无穷大,但在实际中只是形成一个谱峰,故通过搜索  $D(\theta)$  的谱峰可求得  $\theta$ 。这就是 MUSIC 法<sup>[1]</sup>。

如果令  $z = e^{jq_0\tau_i}$ , 则有 
$$a(\theta) = [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-(M-1)}]^T$$

若令 
$$V = \left[ \begin{matrix} M \\ j=P+1 \end{matrix} v_j v_j^H \right] = \{V_{mn}\}_{0 \leq m, n \leq M-1}$$

则式(1)变为 
$$a^H(z) V a(z) = 0$$

上式为  $z$  的一个多项式,可通过求根求得波达方向,这就是 Root-MUSIC<sup>[3]</sup>。它将 MUSIC 的谱峰搜索转化为求根,从而使计算量变得很小。

## 2 二维 Root-MUSIC

现在我们将一维 Root-MUSIC 推广到二维情形,如图 2 所示,若有一阵元位于  $(x_0, y_0)$  处,一入射波和  $x$  轴和  $y$  轴的夹角分别为  $\alpha, \beta$ ,则可以知道入射波在  $(x_0, y_0)$  处相对于原点的相位差为  $2\pi(x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta) / \lambda$ 。现设有一  $L \times R$  的均匀阵元阵列,有  $P$  个  $(1, 1)$  互不相干的窄带源,方向分别为  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_P, \beta_P)$ , 则  $t$  时刻阵元接收到的信号为: (设  $u_i = \exp(j2\pi D \cos\alpha / \lambda)$ ,  $v_i = \exp(j2\pi d \cos\beta / \lambda)$ )

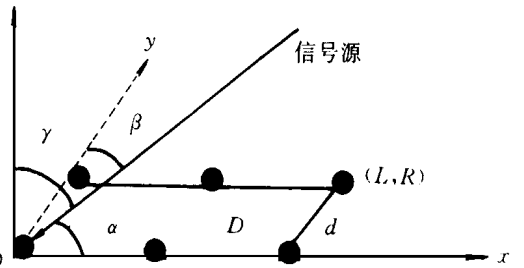


图 2

$$x_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^P u_i^{j-1} v_j^{i-1} s_k(t) + n_{i,j}(t) \quad i = 1, 2, \dots, R \quad j = 1, 2, \dots, L$$

写成向量形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \ddots & u_P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{L-1} v_1^{R-1} & \dots & u_P^{L-1} v_P^{R-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_P(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{1,1}(t) \\ n_{1,2}(t) \\ \vdots \\ n_{L,R}(t) \end{bmatrix} \\ &= [a(\alpha_1, \beta_1) \ a(\alpha_2, \beta_2) \ \dots \ a(\alpha_P, \beta_P)] s(t) + n(t) \\ &= A s(t) + n(t) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_{1,1}(t) \ x_{1,2}(t) \ \dots \ x_{L,R}(t)]^T$   
协方差矩阵为:  $R = AR_sA^H + \sigma^2 I$ , 其中  $R_s = E(ss^H)$  为信号协方差矩阵。

同一维 Root-MUSIC 一样,将  $R$  进行特征分解,设特征值为  $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{P+1} = \dots = \lambda_R = \sigma^2$ , 相应

的特征向量为  $\mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^P, \mathbf{g}^{P+1}, \mathbf{g}^{P+2}, \dots, \mathbf{g}^{LR}$ , 则

$$\mathbf{g}^H \mathbf{a}(\alpha, \beta) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, P \quad j = P+1, P+2, \dots, LR$$

这样我们可以得到  $S(\alpha, \beta) = \mathbf{a}^H(\alpha, \beta) \left[ \begin{array}{c} LR \\ \mathbf{g}_j^H \mathbf{g}_j \end{array} \right] \mathbf{a}(\alpha, \beta)$  在  $(\alpha, \beta)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha^p, \beta^p)$  处为 0。

$$\text{令} \quad u = \exp(j2\pi d \cos\alpha/\lambda), v = \exp(j2\pi d \cos\beta/\lambda), D = \begin{array}{c} LR \\ \mathbf{g}_j^H \mathbf{g}_j \\ j = M+1 \end{array},$$

$$\mathbf{a}(u, v) = [1 \quad u \quad \dots \quad u^{L-1}v \quad vu \quad \dots \quad vu^{L-1} \quad \dots \quad v^{R-1} \quad v^{R-1}u \quad \dots \quad v^{R-1}u^{L-1}]^T$$

则有  $(u_i, v_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , 满足方程

$$S(u, v) = \mathbf{a}^H(u, v) D \mathbf{a}(u, v) = 0 \quad (2)$$

由于(2)式为关于  $(u, v)$  的二元方程, 不能直接求解, 因此一维 Root-MUSIC 不能简单推广到二维。但若我们已知  $u$ , 则上式化为  $v$  的方程, 这时即可求出相应的  $v$ , 而  $u$  可以用一维 Root-MUSIC 对每行求解, 然后用平均的方法得出。因为整个算法是基于求根运算, 因此可称之为二维 Root-MUSIC, 它的计算量很小。已知  $u$  时,  $v^i$  ( $i = -R+1, \dots, R-1$ ) 的系数可如下求得:

设  $D = (D_{m,n})_{LR \times LR}$ , 则  $D_{m,n}$  系数为  $u^k v^i$ ,  $k = (n-1) \bmod L - (m-1) \bmod L$ ,  $i = \text{INT}((n-1)/L) - \text{INT}((m-1)/L)$ , 只需遍历  $D_{m,n}$  即可。

### 3 仿真结果和结论

我们做了几组仿真实验来检验本方法的有效性。令信号数  $P = 2$ , 互不相关, 分别位于  $(45^\circ, 40^\circ)$  和  $(50^\circ, 50^\circ)$ , 阵元间距在  $x, y$  方向上均为半波长, 每种情况均做 50 次, 统计结果见表 1~4。

表 1 ( $SNR = 20\text{dB}, L = 4, R = 2$ , 快拍数 50)

	方向 1( $45^\circ, 40^\circ$ )	方向 2( $50^\circ, 50^\circ$ )
均值	$(45.07^\circ, 40.17^\circ)$	$(50.16^\circ, 50.27^\circ)$
标准差	$(1.00^\circ, 1.97^\circ)$	$(0.94^\circ, 1.74^\circ)$

表 2 ( $SNR = 20\text{dB}, L = 6, R = 2$ , 快拍数 50)

	方向 1( $45^\circ, 40^\circ$ )	方向 2( $50^\circ, 50^\circ$ )
均值	$(44.93^\circ, 39.91^\circ)$	$(49.97^\circ, 49.95^\circ)$
标准差	$(0.31^\circ, 0.64^\circ)$	$(0.31^\circ, 0.57^\circ)$

表 3 ( $SNR = 20\text{dB}, L = 4, R = 2$ , 快拍数 100)

	方向 1( $45^\circ, 40^\circ$ )	方向 2( $50^\circ, 50^\circ$ )
均值	$(44.92^\circ, 39.89^\circ)$	$(50.01^\circ, 50.00^\circ)$
标准差	$(0.70^\circ, 1.40^\circ)$	$(0.58^\circ, 1.08^\circ)$

表 4 ( $SNR = 25\text{dB}, L = 4, R = 2$ , 快拍数 50)

	方向 1( $45^\circ, 40^\circ$ )	方向 2( $50^\circ, 50^\circ$ )
均值	$(44.99^\circ, 40.01^\circ)$	$(50.05^\circ, 50.07^\circ)$
标准差	$(0.52^\circ, 1.04^\circ)$	$(0.48^\circ, 0.88^\circ)$

从表 1~4 可以看出, 本方法对方位角的估计效果比对俯仰角的效果好, 这是因为先由一维 Root-MUSIC 估计出方位, 再将其代入(2)式求俯仰角时, 包含了方位角的误差。

总之, 本文将一维 Root-MUSIC 方法推广到二维, 计算量很小, 如果将此结果作为二维 MUSIC 的初始值, 可以获得更好的估计效果。本方法对俯仰角的估计效果依赖于对方位角的估计效果, 因此如果可以提高方位角的估计效果, 也就可以提高俯仰角的估计效果。

### 参考文献

- Schmidt R. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. IEEE Trans. AP, 1986, 34(3): 276~280
- Roy R, Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. IEEE Trans. ASSP, 1989, 37(7): 984~995
- Barabell A J. Improving the resolution performance of eigen-structure based direction-finding algorithm. ICASSP, 1983: 336~339
- Vander Veen A J, Ober P B, Dopretter E F. Azimuth/Elevation Computation in High Resolution DOA Estimation. IEEE Trans. SP, 1992, 40(7): 1828~1832
- Zoltowski M D, Haardt M, Mathews C P. Closed-Form 2-D Angle Estimation with Rectangular Arrays in Element Space or BeamSpace via Unitary ESPRIT. IEEE Trans. SP, 1996, 44(2): 316~328