国 防 科 技 大 学 学 报
第20卷 第6期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 20 No. 6 1998

在ROBINSON-LUXEMBERG框架下的近初等过程论*

金治明

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文在Robinson-Luxemberg框架下重建了由Nelson所创立的近初等过程论,更有意义的是我们由近初等过程可找回原来的标准过程,为在此框架下运用近初等过程论做随机分析打下了基础。

关键词 非标准分析,近初等过程论,LOEB空间

分类号 O211

The Nearby Elementary Processes under Frame of Robinson-Luxemberg

Jin Zhiming

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the nearby elementary processes are rebuilt, which were first built by Edward Nelson in 1987, under the frame of Robinson-Luxemberg. It is significant that we can get back the primary processes from this nearby elementary processes, which provides the foundation of stochastic analysis under this frame.

Key words Nonstandard Analysis, Nearby Elementary Processes, LOEB space

1987年Edward Nelson在"Radically elementary probability theory"中声称概率论在本质上是初等的,他认为概率空间可取成为超有限的,而在非标准分析中超有限可以化归为有限来研究。支持这个观点的是他的近初等过程论,而近初等过程论是在他自己所创立的'内集理论'的基础上得到的。众所周知,Loeb, Keisler, Anderson等人是在Robinson-Luxembery框架下讨论概率论中的非标准分析,所以我们有必要在Robinson-Luxemberg的框架下建立近初等过程论,更有意义的是我们由近初等过程可找回原来的标准过程,为在此框架下运用近初等过程论做随机分析打下了基础。

1 近初等过程

设$(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0)$为一通常的概率空间,$x$是以$T_0\subset \mathrm{R}_+$为指标集的随机过程,亦即$x: \Omega_0\times T_0\to \mathrm{R}$,且$\forall t\in T_0$, $x(t)$是$\mathscr{F}_{0t}$可测,其中$\mathscr{F}_{0t}=\sigma(x(s): s\leq t)$, $t\in T_0$是$\mathscr{F}_0$的一族上升子σ代数,满足通常的条件。我们考虑非标准的k饱和模型$V({}^*S)$,其中$S\supset \Omega_0\cup \mathrm{R}$, $k\geq \mathrm{Card}\,V(S)$。于是由饱和性,存在超有限集$T$,使得$T_0\subset T\subset {}^*T_0$,记$T$的内基数为$\gamma$. $({}^*\Omega_0, {}^*\mathscr{F}_0, {}^*P_0)$是一个*标准概率空间,其中$^*P_0$是*有限可加的内测度,对$^*P_0$测度的内积分记为$^*E_0$. 由转换原理,${}^*x: T\times{}^*\Omega_0\to{}^*\mathrm{R}$是内映射,且$\forall t\in T$, ${}^*x(t)$是$\mathscr{F}_{0t}$可测的内随机变量。

定义1 称内函数$X: T\times{}^*\Omega_0\to{}^*\mathrm{R}$为$x$的近初等过程,如果

(1) 存在无穷大自然数$\eta\in{}^*N_\infty$,使得$\forall t\in T, \omega\in\Omega_0$, $X(t,\omega)=\sum_{k=-\eta}^{\eta}a_k(t,\omega)2^{-k}$,其中$a_k(t,\omega)$取0, 1, -1。亦即$\{X(t,\omega): \omega\in{}^*\Omega\}$是一个R中的*有限集;

(2) 除去Ω_0的一个内测度为无穷小的集合外,

* 国家自然科学基金资助
1998年6月15日收稿
第一作者:金治明,男,1941年生,教授

$$\sum_{t\in T} |{}^*x(t) - X(t)| \approx 0 \tag{1}$$

我们方便地称这为(1)式近几乎成立, 并记为 $n.s.$。

定理 1　设有$(\Omega, \mathscr{F}_0, P_0, \mathscr{F}_{0t}, T_0, x)$, 则存在它的近初等过程, 且当$\forall t\in T_0, x(t)\in L^p, (p\geq 1)$时, 则有

$$\sum_{t\in T} \| {}^*x(t) - X(t) \|_p \approx 0 \tag{2}$$

其中$\| {}^*x(t) - X(t) \|_p = {}^*E_0^{1/p}(|{}^*x(t) - X(t)|^p)$

证明　$\forall x\geq 0, n\in \mathrm{N}$, 令 $x_{[n]} = \max\{y \leq x : y = \sum_{k=-n}^{n} a_k 2^{-k}, a_k = 0 \text{ 或 } 1\}$

当 $x< 0$, 令 $x_{[n]} = -(-x)_{[n]}$

(1) 设$\forall t\in T_0, x(t)\in L^p(p\geq 1)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 对正实数 ϵ, $\exists n_t\in \mathrm{N}$, 当 $n> n_t$ 时, $\| x(t) - x(t)_{[n]} \|_p \leq \epsilon$, 由转换原理, 对正无穷小 ϵ, $\forall t\in T$ 存在 $n_t\in {}^*\mathrm{N}$, 当 $n\geq n_t$ 时有

$$\| {}^*x(t) - {}^*x(t)_{[n_t]} \|_p \leq \epsilon$$

取 $\eta = \max_{t\in T} n_t$, $X(t) = {}^*x(t)_{[\eta]}$, 则 $\sum_{t\in T} \| {}^*x(t) - X(t) \|_p \approx \epsilon$

(2) 式成立。

当 $p = 1$ 时,

$$\begin{aligned} {}^*P_0\left(\sum_{t\in T} |{}^*x(t) - X(t)| > \epsilon^{1/2}\right) &\leq \epsilon^{-1/2}\, {}^*E_0\left(\sum_{t\in T} |{}^*x(t) - X(t)|\right) \\ &\leq \epsilon^{-1/2} \sum_{t\in T} \| {}^*x(t) - X(t) \|_1 \leq \epsilon^{-1/2} \approx 0 \end{aligned} \tag{3}$$

当 $p > 1$ 时,

$$\begin{aligned} &{}^*P_0\left(\sum_{t\in T} |{}^*x(t) - X(t)| > \epsilon^{1/2p}\right) \\ &\leq \epsilon^{-1/2}\left(\sum_{t\in T} \| {}^*x(t) - X(t) \|_p\right)^p \leq \epsilon^{p-1/2} \end{aligned} \tag{4}$$

由(3)及(4)式可见,

$$\sum_{t\in T} |{}^*x(t) - X(t)| \approx 0 \quad n.s. \tag{5}$$

(2) 对一般的 x, 记 $\mathrm{N}_n = \{\max_{t\in T} |x(t)| > 2^n\}$, 其中 T_1 为 T_0 的有限子集, 则由转换原理, $\forall T\in {}^*\mathscr{P}(T_0)$, $\forall$ 正无穷小 $\epsilon_1\in {}^*\mathrm{R}_+$, $\exists n_0\in {}^*\mathrm{N}$, 当 $n\geq n_0$ 时,

$${}^*P_0\left(\max_{t\in T} |{}^*x(t)| > 2^n\right) \leq \epsilon_1 \tag{6}$$

取 ϵ 为正无穷小, 取 $\eta\in {}^*\mathrm{N}\setminus \mathrm{N}$ 为使得 $\eta\geq n_0$, $\gamma\cdot 2^{-\eta}\leq \epsilon$ 成立的第一个正无穷大自然数, 则 $\omega\in\{\max_{t\in T} |{}^*x(t)| > 2^\eta\}^c$ 时, $0\leq {}^*x(t) - X(t) \leq 1/2^\eta$. 所以, (5) 式成立。因此, $X(t)$ 即为所求的近初等过程。□

近初等过程未必唯一, 为此引入

定义 2　称两个内函数 $X, Y: T\times\Omega\to {}^*\mathrm{R}$ 为近强等价的, 如果

$$\sum_{t\in T} |X(t) - Y(t)| \approx 0 \quad n.s.$$

我们记为 $X\approx Y, n.s.$.

设 $\mathscr{F}_0 = \sigma(x(s), s\in T_0)$, $\mathscr{F}_{0t} = \sigma(x(s), s\leq t)$, 令 $\bar{\mathrm{R}}^{T_0} = \prod_{t\in T_0} \bar{\mathrm{R}}$, $\bar{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\cup(\infty)$, $\bar{\mathrm{R}} = \prod_{s\in T_0, s< t} \bar{\mathrm{R}}$, 并赋以通常拓扑的乘积拓扑, 它是紧 Hausedorff 空间。

$\mathscr{F}^{T_0}, \mathscr{F}^t$ 分别为 $\bar{\mathrm{R}}^{T_0}, \bar{\mathrm{R}}^t$ 中圆柱集生成的 σ 代数的完备化。$P_0^{T_0}$ 为由过程$(x(t), t\in T_0)$的有限维分布所诱导的正则概率测度。那么$(\bar{\mathrm{R}}^{T_0}, \mathscr{F}^{T_0}, P_0^{T_0})$是 Radon 空间。众知, 对于只牵涉到有限维分布的概率论问题, 我们可以只考虑定义在典则空间$(\bar{\mathrm{R}}^{T_0}, \mathscr{F}^{T_0}, P_0^{T_0})$上的坐标过程。因此在下面定理的证明中不妨设 Ω 是典则空间。

定理 2　设 x, y 为两个适应过程, 它们的近初等过程分别为 X, Y, 则当 x 与 y 无区别当且仅当 X

与 Y 近强等价。

证明　我们只需证明: $x=0, a.e. \Leftrightarrow X \approx 0, n.s.$ 这里 $x=0, a.e.$ 表示过程 x 与 0 无区别, 亦即不计零测集, $x=0$. X 为 x 一个近初等过程, 从而存在内集 N, $^*P_0(\mathrm{N}) \approx 0$, 在 N^c 上成立:

$$\sum_{t\in T} X(t) - {}^*x(t) \approx 0 \tag{7}$$

充分性: 假设 x 与 0 不无区别, 则 $P_0(\omega \in \Omega_0 \ \exists\ t \in T_0,\ x(t) > 0) > 0$

令
$$\Gamma_{kG} = \{\omega \in \Omega_0 \ \max_{t\in G} x(t) > \frac{1}{k}\}$$

其中 $k \in \mathrm{N}, G \in \mathscr{P}_f(T_0)$ 为 T_0 的有限子集。显然 Γ_{kG} 为 Ω_0 中的开集。由于

$$\{\omega \in \Omega_0 \ \exists\ t \in T_0, \text{使得}\ x(t) > 0\}$$
$$= \bigcup_{k\in\mathrm{N}} \{\omega \in \Omega_0 \ \exists\ t \in T_0,\ x(t) > \frac{1}{k}\}$$
$$\subseteq \bigcup_{k\in\mathrm{N}} \bigcup_{\{G\in\mathscr{P}_f(T_0)\}} \Gamma_{kG}$$

故
$$P_0(\bigcup_{k\in\mathrm{N}} \bigcup_{G} \Gamma_{kG}) \triangleq \epsilon \in \mathrm{R}_+$$

由[1]之定理 $A.5, A.6$ 知, 存在 $k \in \mathrm{N}$, 以及 $G \in \mathscr{P}_f(T_0)$ 使得

$$^*P_0(^*\Gamma_{kG}) = P_0(\Gamma_{kG}) \geq \frac{\epsilon}{2} > 0$$

从而在具严格正测度的内集 $^*\Gamma_{kG}$ 上, 有

$$\max_{t\in G} {}^*x(t) > \frac{1}{k}$$

但有(7)式, 这与 $X \approx 0, n.s.$ 矛盾。

必要性: 假设 x 与 0 无区别, 即 $A = \{\omega \in \Omega_0 \ \forall\ t \in T_0, x(t) = 0\}$ 的 P_0 测度为 1. 于是在 $^*A \cap N^c$ 上有,

$$\sum_{t\in T} X(t) = \sum_{t\in T} X(t) - {}^*x(t) \approx 0$$

而 $^*P_0(N^c \cap {}^*A) = 1$ 这表明 $X \approx 0, n.s.$. □

今后记 $\theta: x \to X$ 为由适应过程 x 到它的近初等过程的映射, 那末在不计无区别以及不计近强等价的意义下, θ 是一个单射。

定理 3　设$(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0)$为标准概率空间, Π 为有限的 $\mathscr{F}_0$ 可测分割的全体, 则存在 $\pi_0 \in {}^*\Pi$, 使

(1) 存在 $\eta \in {}^*\mathrm{N}_\infty$, 使 $\pi_0 = \{A_1, A_2, \cdots, A_\eta\}$, 每个 $A_i \in {}^*\mathscr{F}_0$;

(2) $I = \{i \in {}^*\mathrm{N} \ 1 \leq i \leq \eta\}$, $A_i \neq \not\subset$, $A_i \cap A_j = \not\subset\ (i \neq j)$, $^*\Omega_0 = \bigcup_{i\in I} A_i$;

(3) 对任意的 $B \in \mathscr{F}_0$, $I(B) = \{i \in I \ A_i \subseteq {}^*B\}$ 仍是* 有限集, 且 $^*B = \bigcup_{i\in I(B)} A_i$

(4) 设 f 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的随机变量, 则对每个 $A \in \mathscr{F}_0$, f 的振幅

$$D(^*f, A) \triangleq \sup_{\omega\in A} f(\omega) - \inf_{\omega\in A} f(\omega) \approx 0$$

证明　在[4]中已经证明 π_0 的存在性。并对有界可测函数证明了(4), 我们只需对非负可测函数 f 证明(4)。因为 $f = \lim_{n\to\infty} f \wedge n$, 于是对任意的 $H \in {}^*\mathrm{N}_\infty$, $^*f \approx {}^*(f \wedge H)$。固定自然数 k, 内集

$$\{n \in {}^*\mathrm{N} \ \forall A \in \pi_0, \forall x, y \in A,\ {}^*(f \wedge n)(x) - {}^*(f \wedge n)(y) < \frac{1}{k}\}$$

包含 N, 因此含有某个无穷大自然数 H_k, 取 $H = \inf_k H_k$, 则 $H \in {}^*\mathrm{N}_\infty$, 当 $n \leq H$ 时,

$$\forall x, y \in A,\ {}^*(f \wedge H)(x) - {}^*(f \wedge H)(y) \approx 0$$

这就证明了 $^*f$ 在 π_0 的每个分割集上。不计无穷小的差别为常数。□

记 $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\pi_0)$ 表示由分割 π_0 生成的内代数, 设 X 为 x 的近初等过程, 则对每个 $s \in T$, $X(s)$ 只取* 有限个值, 因此可将 π_0 中的每个集再作* 有限分割, 记它为 π_0^*。两个分割的乘积是一个新的分割, 它是由两个分割中集合的一切交集所构成的更细的分割。令

$$\pi_0(t) = \prod_{s\in T, s\leq t} \pi_0^*, \quad \pi_0(T) = \prod_{s\in T} \pi_0^*$$

则它仍是$^*\Omega_0$的*有限分割, 令$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(\pi_0(t))$,
则$\mathcal{A}_t$是$\mathcal{A}$的一族上升子代数, $X(t)$是$\mathcal{A}_t$适应的内过程。

当$T_0 = \mathrm{N}$时, 取$T = \{1, 2, \cdots, v\}$, 这里$v \in {}^*\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}$, 当$T_0 \subset \mathrm{R}$, T的首元与末元分别记为a与b, 记$T^1 = T \setminus b$, 对$t \in T^1$, 其后继写为$t + \mathrm{d}t$, 并对定义在T上的函数f, 记$\mathrm{d}f(t) = f(t + \mathrm{d}t) - f(t)$.

定理 4 设$x(t)$, $t \in T$是一个$(\Omega_0, \mathscr{F}_0, \mathscr{F}_t, P_0)$上鞅(鞅, 下鞅), 则存在它的近初等上鞅(鞅, 下鞅)$(X(t), \mathcal{A}_t)$.

证明 记$a = \min T$, $b = \max T$, $T^1 = T \setminus b$, $t + \mathrm{d}t$为t的后继。由定理 1 的(5)式可知, 对正无穷小ϵ, 存在近初等过程X使得$\sum_{t \in T} \| {}^*x(t) - X(t) \| \leq \epsilon / 5\gamma$,
定义随机过程$Y: T \times {}^*\Omega_0 \to {}^*\mathrm{R}$如下:

$$Y(a) = X(a)$$
$$\mathrm{d}Y(t) \triangleq Y(t + \mathrm{d}t) - Y(t)$$
$$= \mathrm{d}X(t) + {}^*E_0(\mathrm{d}\,{}^*x(t) - \mathrm{d}X(t) \mid \mathcal{A}_t)$$
$$Y(t) = Y(a) + \sum_{s < t} \mathrm{d}Y(t), \quad t \in T$$

于是
$$Y(t) - {}^*x(t) = X(a) - {}^*x(a) + \sum_{s < t} {}^*E_0(\mathrm{d}\,{}^*x(s) - \mathrm{d}X(s) \mid \mathcal{A}_s)$$
$$+ \sum_{s < t} (\mathrm{d}X(s) - \mathrm{d}\,{}^*x(s))$$

从而
$$\| Y(t) - {}^*x(t) \| \leq 5 \sum_{t \in T} \| {}^*x(t) - X(t) \| \leq \epsilon / \gamma$$
$$\sum_{t \in T} \| Y(t) - {}^*x(t) \| \leq \epsilon \tag{8}$$

而由转换原理
$${}^*E_0(\mathrm{d}Y(t) \mid \mathcal{A}_t) = {}^*E_0(\mathrm{d}\,{}^*x(t) \mid \mathcal{A}_t) = {}^*E_0(\mathrm{d}\,{}^*x(t) \mid {}^*\mathscr{F}_{0t}) \leq 0$$
所以$X(t)$是近初等上鞅。□

2 轨道的性质

本节中, 总假定x为适应过程, X为其近初等过程。

定义 3 设$p \geq 1$, 称$x \in L^p$是指对一切$t \in T_0$, $E_0 |x(t)|^p < \infty$; 称$x \in u.i.L^p$是指
$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in T_0} \int_{|x(t)| > n} |x(t)|^p = 0$$

$X \in SL^p$是指对一切$t \in T$, $|X(t)|^p$为S可积, 即对任意的正无穷大自然数H, $\int_{|x(t)| > H} |X(t)|^p \mathrm{d}P \approx 0$

定理 5 $x \in u.i.L^p$, 当且仅当$X \in SL^p$.

证明 充分性: 由$\forall t \in T$, $\forall H \in {}^*\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}$
$$\int_{|x(t)| > H} |X(t)| \mathrm{d}P \approx 0$$
则对正实数ϵ, $\max_{t \in T} \int_{|x(t)| > H} |X(t)|^p \mathrm{d}P \leq \epsilon$, 用$^*x(t)$换$X(t)$, 上述不等式仍然成立。考虑内集
$$A = \{n \in {}^*\mathrm{N}: \forall t \in T, \int_{|{}^*x(t)| > n} |{}^*x(t)|^p \leq \epsilon\}$$
含有一切正无穷大自然数, 因此由下溢原理, 存在$n_0 \in \mathrm{N}$, 当$n > n_0$时, $n \in A$. 而当$t \in T_0$, $\omega \in \Omega_0$时, ${}^*x(t) = {}^*(x(t))$, 所以由转换原理
$$\sup_{t \in T_0} \int_{|x(t)| > n} |x(t)|^p \mathrm{d}P_0 \leq \epsilon$$
这表明$x \in u.i.L^p$.

必要性: 由假设, 对任意的正实数ϵ, 存在$n_0 \in \mathrm{N}$使得

$$\forall n \in \mathrm{N}, n > n_0, \forall t \in T_0, \int_{x(t)^{p} > n} x(t) \leq \epsilon$$

由转换原理及$\forall t \in T$, $X(t) \leq {}^{*} x(t)$,则对$\forall H \in {}^{*}\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}, t \in T$

$$\int_{X(t)^{p} > H} X(t) \approx 0$$

所以$X \in SL^{p}$. □

定义 4 称* 有限序列$a_1, \cdots, a_p$是SL收敛的,如果存在$a \in {}^{*}\mathrm{R}$,使得对任意正无穷大自然数$\mu \leq \nu$有$a_\mu \approx a$.称* 有限级数$\sum_{n=1}^{v} a_n$是SL收敛的,是指它的部分和的* 有限序列是SL收敛的。

显然$\sum_{n=1}^{v} a_n$ SL收敛等价于$\forall$正无穷大自然数$n \leq v$, $\sum_{k=n}^{v} a_k \approx 0$

定义 5 称序列$x(n)_{n=1}^{\infty}$为L^p收敛是指$\lim_{n,m \to \infty} \| x(n) - x(m) \|_p \to 0$称内序列$(X(n))_{n=1}^{\nu}$为$SL^p$收敛,是指对任意的正无穷大自然数$n, m \leq v$,有$\| X(n) - X(m) \|_p \approx 0$

定理 6 $x(n)_{n=1}^{\infty} L^p$收敛当且仅当$(X(n))_{n=1}^{\nu}$为SL^p收敛。

证明 必要性: $\forall \epsilon \in \mathrm{R}_+$,存在$n_0 \in \mathrm{N}$,当$n, m > n_0$时有

$$E_0 \; x(n) - x(m)^{p} < \epsilon \tag{9}$$

由转换原理及X为x的近初等过程知,当n, m为正无穷大自然数,且$n, m \leq \nu$时有

$${}^{*}E_0 \; x(n) - x(m)^{p} \approx 0$$

充分性: 对任意的$\epsilon \in \mathrm{R}_+$,由$(X(n))_{n=1}^{\nu} SL^p$收敛,内集

$$A = \{n \in {}^{*}\mathrm{N}: n \leq m \leq \nu, {}^{*}E_0 \; {}^{*}x(n) - {}^{*}x(m)^{p} < \epsilon\}$$

含有一切$n \in {}^{*}\mathrm{N} \setminus \mathrm{N}, n \leq \nu$,由下溢原理可知存在$n_0 \in \mathrm{N}$,使(15)式成立。因而$x$为$L^p$收敛。

定理 7 设$x \in L^p$,则$\sum_{n=1}^{\infty} \| x(n) \|_p$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\nu} \| x(n) \|_p S$收敛。

证明 必要性: 对$\epsilon \in T_0$,存在$n_0 \in \mathrm{N}$,当$m > n > n_0$时,

$$\sum_{i=n}^{m} \| x(i) \|_p \leq \epsilon$$

由转换原理及X为x的近初等过程可知,对正无穷大自然数$n < m < \nu$,有

$$\sum_{i=n}^{m} \| X(i) \|_p \approx 0$$

充分性: 由于对正无穷大自然数$n < m < \nu$,

$$\sum_{i=n}^{m} \| X(i) \|_p \approx 0$$

对正实数ϵ,内集

$$A = \{n \in {}^{*}\mathrm{N}: m \in {}^{*}\mathrm{N}, \nu > m > n, \sum_{i=n}^{m} \| X(i) \|_p < \epsilon\}$$

含有一切不大于υ的正无穷大自然数,因此存在$n_0 \in \mathrm{N}$,使一切自然数满足$n > n_0$的n属于A. X是x的近初等过程,于是对自然数$m > n > n_0$,有$\sum_{i=n}^{m} \| {}^{*}x(i) \| < \epsilon$,而当$i \in \mathrm{N}$时, $\| {}^{*}x(i) \|^{p} = {}^{*}(\| x(i) \|^{p})$,故由转换原理充分性得证。□

定理 8 x在$t_0 \in T_0$处L^p连续当且仅当X在t_0处SL^p连续。

证明 必要性易证。

充分性: 对正实数ϵ,则内集

$$\mathrm{O} = \{\delta \in \mathrm{R}_+ : \forall t \in T, \; t - t_0 < \delta, 有 \; \| X(t) - x(t_0) \|_p < \epsilon\}$$

包含一切正无穷小,因而存在$\delta \in \mathrm{R}_+ \cap O$,即

$$\forall t \in T_0, \; t - t_0 < \delta, \| {}^{*}x(t) - {}^{*}x(t_0) \|_p \leq \epsilon$$

而当$t \in T_0$时, ${}^{*}x(t) = {}^{*}(x(t))$,所以$x$在$t_0$处$L^p$连续。□

定理 9 x 为 L^p 有界变差当且仅当 $\sum_{t\in T} \| dX(t) \|_p$ 有限。

证明

必要性: 存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得对 T_0 的任意有限子集 T_1,

$$\sum_{t\in T_1} \| d^* x(t) \|_p \leq K,$$

由转换原理及 X 为 x 的近初等过程立得结果。□

充分性: 由假设可知, 存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall T_0$ 的有限子集 T_0',

$$\sum_{t\in T_0'} \| d^* x(t) \|_p \leq K,$$

从而 $\sum_{t\in T_0'} \| dx(t) \|_p \leq K$, x 为 L^p 有限。□

在下面的乘积空间 $T_0\times\Omega_0$ 上, 乘积测度为 $dt\times dP_0$, dt 为 Lebesgue 测度, 而在内空间 $T\times\Omega$ 上, 乘积测度为 $dt\times dP$, dt 为内计数测度。

定理 10 设 $T_0=[a,b]$, x 为 $T_0\times\Omega_0$ 上的可测过程, 则 $x\in L^p(T_0\times\Omega_0)$ 当且仅当 $X\in SL^p(T\times\Omega)$

证明

必要性: 记 $x^{(n)}=xI_{|x|\leq n}$, 对正数 ϵ, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0 \text{ 时} \int_{T_0\times\Omega_0} |x^{(n)}-x|^p dP_0 dt<\epsilon$$

由转换原理, 并考虑到 X 为 x 的近初等过程, 对任意的 $\eta\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$

$$\int_{|X|\geq\eta} |X(t)|^p dP dt\approx 0$$

因为 T_0 的测度有限, 容易证明此时 $\int_{T\times\Omega} |X|^p dP dt$ 有限。

充分性: 对任意的正实数 ϵ 内集

$$A=\{n\in{}^*\mathbb{N}: \int_{|X(t)|>n} |X(t)|^p dP dt<\epsilon\}$$

包含一切正无穷大自然数, 因此存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使对 $n>n_0$,

$$\int_{|^*x(t)|>n} |^*x(t)|^p dP dt<\epsilon$$

而当 $t\in T_0$ 时, $^*x(t)={}^*(x(t))$, 因此由转换原理,

$$\int_{T_0}\int_{\Omega_0} |x^{(t)}|^p dP dt<1+n(b-a)$$

所以, $x\in L^p(T_0\times\Omega_0)$. □

定理 11 x 为 L^1 绝对连续当且仅当 $dX/dt\in SL^1(T\times{}^*\Omega_0)$.

证明

充分性: 考虑 $[a,b]$ 中有限个互不重叠的子区间族 $\mathscr{T}=\{[a_i,b_i], i=1,2,\cdots,n, n\in\mathbb{N}\}$, $\forall I\in\mathscr{T}$, 记 $|I|=\sum_{i=1}^n |b_i-a_i|$, $\mathrm{Var}(I)=\sum_{i=1}^n \|x(b_i)-x(a_i)\|_1$,

$$\mathrm{Var}(I)=\sum_{i=1}^n \|x(b_i)-x(a_i)\|_1$$

往证:
$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+, \exists\delta\in\mathbb{R}_+\ \forall I\in\mathscr{T}\ |I|<\delta\to\mathrm{Var}(I)<\epsilon) \tag{10}$$

由转换原理以及 X 为 x 的近初等过程可知(16) 式等价于

$$\forall I\in{}^*\mathscr{T}, |I|\approx 0\to\mathrm{Var}(I)\approx 0 \tag{11}$$

但是对于 $I\in\mathscr{T}$, I 是$^*[a,b]$中的* 有限子区间集, 其子区间的端点不一定属于 T。当它们属于 T 时, 称 $I\in{}^*\mathscr{T}$为好的。显然由(17) 式成立, 则对于好的 I, (17) 式当然成立。反之, 若(17) 式对好的 I 成立, 那么对于端点属于$[a,b]$的 I, (17) 式也成立。由标准的证法知, $\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+$, $\forall I\in{}^*\mathscr{T}$, $\exists n\in{}^*\mathbb{N}$, $I=\{[a_i,b_i], a_i,b_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,n\}$,

$$\exists\ \delta\in R_+,\ |I|<\delta\to \mathrm{Var}(I)<\epsilon \tag{12}$$

因 X 为 x 的近初等过程。将 $\mathrm{Var}(I)$ 中 X 换为 $^*x$ 仍然成立, 而且当 $c\in[a,b]$, $^*x(c)={}^\circ x(c)$。因此(16)式,从而(17)式成立。这表明(16)式等价于对好的 I, (17)式成立。对于好的 I, $|I|\approx 0$, 令 $M=I\times{}^*\Omega_0$, 则 $\int_M \mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0$, 而

$$\mathrm{Var}(I)=\int_M\left|\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0 \tag{13}$$

所以, $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t\in L^1(T^1\times{}^*\Omega_0)$

必要性: 由假设存在标准函数 $y\in L^1(T_0\times\Omega_0)$, 使对一切 $t\in T_0$, $a.e.\ \omega_0\in\Omega_0$

$$x(t,\omega_0)=\overset{\circ}{x}(a,\omega_0)+\int_a^t y(s,\omega_0)\mathrm{d}s$$

令 Y 为 y 的近初等过程, 则由定理8, $Y\in SL^1(T'\times{}^*\Omega_0)$. 选 $x_0(a)$ 的近初等随机变量 $X(a)$ (即常值过程的近初等过程), 定义

$$X(t)=X(a)+\sum_{a<s<t}Y(s)$$

则易证 X 为 x 的近初等过程, 且 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t=Y\in SL^1(T'\times{}^*\Omega_0)$. □

注意定理8中 T_0 的测度有限。当 T_0 为 R_+ 的无限子集时, 我们需要 Anderson 的 S 可积性:

定义6 称内函数 $X:T\times{}^*\Omega_0\to{}^*R$ 为 AS 可积。并记为 $X\in SL^p(T\times{}^*\Omega_0)$ 是指它满足:

(1) $\int_{T\times{}^*\Omega_0}|X|\mathrm{d}P\mathrm{d}t$ 有限; (2) 设内集 $A\subset T\times{}^*\Omega_0$, $\int_A\mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0$, 则 $\int_A|X|\mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0$;

(3) 如 A 为内集, 且 $X|_A\approx 0$, 则 $\int_A|X|\mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0$.

Anderson 在[2]中还证明了当 T_0 的测度有限时, X 为 AS 可积即定义2中的 S 可积。显而易见如内函数 X 只取有限值, 则 X 为 AS 可积的。

定理12 $SL^p({}^*\Omega_0\times T)$ 是完备的空间。

证明 设 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 Cachy 列, 则 $\lim_{n,m\to\infty}\|F_n-F_m\|_p=0$, 其中 $\|\cdot\|_p$ 表示 SL^p 范数。于是对正实数 ϵ, 存在 n_0, 当 $m>n>n_0$ 时 $\|F_n-F_m\|_p<\epsilon$. 将 $(F_n)_{n\in N}$ 扩大为内序列, 内集

$$A=\{n\in{}^*N:\forall m>n,\ \|F_n-F_m\|_p<\epsilon\}$$

包含一切正无穷大自然数, 因此存在 $n_0\in N\cap A$. 令 $F=F_m$, $m\in{}^*N_\infty$, 则 $\lim\|F_n-F\|_p=0$. 往证 $F\in SL^p$。首先由 $\|F_n\|$ 有限, 可知 $\|F\|$ 有限。设 A 为 $T\times{}^*\Omega_0$ 的内集。$\int_A\mathrm{d}P\mathrm{d}t\approx 0$

则由
$$\int_A|F|^p\mathrm{d}P\mathrm{d}t\le\int_A|F_n|^p\mathrm{d}P\mathrm{d}t+\int_A|F_n-F|^p\mathrm{d}P\mathrm{d}t$$

可见上述左式为无穷小。设 A 为 $T\times{}^*\Omega_0$ 的内集, $F|_A\approx 0$, 令 $G_n=F_nI_{(|F_n|\le|F|)}+FI_{(|F_n|>|F|)}$, 则 $|F-G_n|\le|F-F_n|$, $\|G_n\|_A=\|F\|_A\approx 0$, 因此 $\int_A|F|^p\le\int_A|G_n|^p+\|F-F_n\|_p$, 故 $\int_A|F|^p\approx 0$, 由此可见 $F\in SL^p(T\times{}^*\Omega_0)$ □

定理13 $X\in SL^p(T\times{}^*\Omega_0)$ 当且仅当 $x\in L^p(T_0\times\Omega_0)$

证明

充分性: 记 $x^{(n)}=xI_{(|x|<n)}$, 则对任意的正数 ϵ, 存在自然数 n_0, 使

$$\int_{\Omega_0\times T_0}|x^{(n)}-x^{(m)}|^p\mathrm{d}P_0\mathrm{d}t<\epsilon,\ m>n>n_0$$

于是
$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{\Omega_0\times T}|X^{(n)}-X^{(m)}|^p\mathrm{d}P\mathrm{d}t=0$$

其中 $X^{(n)}$ 为 $x^{(n)}$ 的近初等过程。$X^{(n)}$ 取有限值, $X^{(n)}\in SL^p({}^*\Omega_0\times T)$, 而 $SL^p({}^*\Omega_0\times T)$ 完备, 因此存在 $X\in SL^p({}^*\Omega_0\times T)$, 使 $\|X^{(n)}-X\|_p\to 0$.

$$\|X-{}^*x\|_p\le\|X-X^{(n)}\|_p+\|X^{(n)}-{}^*x^{(n)}\|_p$$

$$+\ \| {}^*x^{(n)} - {}^*x \|_p \approx 0$$

所以X 为x 的近初等过程。必要性与定理 10的证明相同。

以上定理刻划了x 与X 的解析性质, Nelson 在[1]中还证明了概率性质的等价性。在这里我们只列出而不予证明, 因为其基本方法是标准的。

定理 **14**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) < \infty a.s. \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$ 有限。$n.s. \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\nu} x(n)$ S 收敛。$n.s.$;

(2) 如$t \in T_0 \subseteq$ R, 则x 在t 处$a.s.$连续$\Leftrightarrow X$ 在t 处S 连续。$n.s.$;

如果T_0 为R 的紧子集, 则

(3) x 在T_0 $a.s.$连续$\Leftrightarrow X$ 在T 上S 连续。$n.s.$;

(4) x 没有第二类间断点。$a.s. \Leftrightarrow X$ 没有无限个非无穷小的跳。$n.s.$;

(5) 如$Y_0 \subseteq$ R, 则x 有界变差。$a.s. \Leftrightarrow X$ 有限变差。$n.s.$

3 条件期望

本节讨论* 条件期望与内条件期望的关系, 是联系标准过程与近初等过程的关键。

引理 **15** 设有$(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0, \mathscr{F}_{0t}, T_0, x)$, 且$x$ 为可分过程, 则${}^*\mathscr{F}_{0t} \cup \mathscr{N} = \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$, 其中$\mathscr{N}$表示全体测度为无穷小的内集。

证明 我们用Q_t 表示小于等于t 的全体有理数, 则

$$\mathscr{F}_{0t} = \sigma(\{\omega \mid \frac{k}{2^n} < x(s) \leq \frac{k+1}{2^n}, s \in Q_t, k, n \in \mathrm{N}\})$$

$$\triangleq \sigma(A_n^k(s) \mid s \in Q_t, n, k \in \mathrm{N}) = \sigma(E_1, E_2, \cdots) \triangleq \sigma(C_0)$$

其中$C_0 = \{E_1, E_2, \cdots\}$为$\{A_n^k\}$的重排。由[5]之§5 习题 1.9,

$$\sigma(C_0) = \cup \{C_\alpha \mid \alpha < \mathscr{N}_1(\text{阿里夫})\} \tag{14}$$

而

$$C_\alpha = (\cup \{C_\beta \mid \beta < \alpha\})' \tag{15}$$

这里C' 表示C 中的集合的差集的一切有限并组成的集类, 显然$C' \supseteq C$。由于C_0 是可列集, 因而$\sigma(C_0)$ 也是至多可列集。因为(14)式中α小于等于$\mathscr{N}_0$(阿里夫), (15)式的并是可列并。于是, 若记$E = C_{\mathscr{N}_0}$,

$${}^*\mathscr{F}_{0t} = \bigcup_{n \in {}^*\mathrm{N}} {}^*C_n \cup {}^*E \tag{16}$$

${}^*C_0 = \{{}^*E_1, {}^*E_2, \cdots, {}^*E_n, \cdots\}_{n \in {}^*\mathrm{N}}$为$C_0$ 的* 标准扩张。因为每个E_i 是某个$A_n^k(s)$, 于是${}^*E_i = \{\omega \in \Omega_0 \mid k/2^n \leq x(s) < k+1/2^n\}$. 由(6)式可见,

$${}^*E_i = \mathrm{N} \cup \{\omega \in \Omega_0 \mid X(s) = \frac{k}{2^n}\} \in \mathscr{N} \cup \mathscr{A}_t$$

所以, ${}^*C_0 \subseteq \mathscr{N} \cup \mathscr{A}_t$. 因为当$C \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$, 则$C' \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$, 而对$n = 0$, 有${}^*C_0 \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$, 而如果${}^*C_n \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$, 则$C_{n+1} = {}^*C_n' \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$. 因此对归纳法用转换原理, 对一切$n \in$ N, $C_n \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$. 故${}^*\mathscr{F}_{0t} = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} {}^*C_n \cup {}^*E \subseteq \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$.

反之, 设内集$A \in \pi_0 \in {}^*\Pi$, 则由定理 1,

$$A = \{\omega \in \Omega_0 \mid X(t) = \frac{i}{2^n}\}, i \in \mathrm{N}, i \leq 2^n$$

则$A = A\,N \cup \{\omega \in \Omega_0 \mid i - 1/2^n < {}^*x(t) \leq i/2^n\} \in {}^*F_{0t} \cup \mathscr{N}$, 从而$\mathscr{A}_t \subseteq {}^*\mathscr{F}_{0t} \cup \mathscr{N}$. 联合前段证明的结果, 则${}^*F_{0t} \cup \mathscr{N} = \mathscr{A}_t \cup \mathscr{N}$. □

引理 **16** 设x 为可分的一致可积的适应过程, X 为其近初等过程, 则对任意的$s, t \in T$, $t > s$, 有

$${}^*E_0({}^*x(t) \mid \mathscr{F}_{0s}) \approx {}^*E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s) \quad n.s.$$

证明 如不然, 则存在$\epsilon \in \mathrm{R}_+$, 内集$A$, ${}^*P_0(A) > \epsilon > 0$, 使得在$A$ 上${}^*E_0({}^*x(t) \mid \mathscr{F}_{0s}) \not\approx {}^*E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s)$, 令

$$D = \{n \in \mathrm{N} \ \forall \omega \in A, \ {}^*E_0({}^*x(t) \mid \mathscr{F}_{0s}) - {}^*E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s) > \frac{1}{n}\}$$

包含$^*N_\infty$,因此必包含某个正实数ϵ_0. 令$F = \{{}^*P_0(\mathscr{A} \mid {}^*\mathscr{F}_{0s}) > 0\}$,则$F \in {}^*\mathscr{F}_{0s}$,因而$F = G \cup N$,其中,$G \in \mathscr{A}_s$, $N \in \mathscr{N}$.

$$\int^*_F E_0({}^*x(t) \mid {}^*\mathscr{F}_{0s})\mathrm{d}^*P_0 = \int^*_F x(t)\mathrm{d}^*P_0 \approx \int_F X(t)\mathrm{d}^*P_0$$

$$= \int_{G\cup N} X(t)\mathrm{d}^*P_0 \approx \int_G X(t)\mathrm{d}^*P_0$$

$$= \int^*_G E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s)\mathrm{d}^*P_0 \approx \int^*_F E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s)\mathrm{d}^*P_0 \tag{17}$$

这里用到$X(t)$的S可积性(定理5)。

而另一方面,由F的定义$P_0(AF^c) = \int^*_F P_0(A \mid {}^*\mathscr{F}_{0s})\mathrm{d}^*P_0 = 0$

可见$^*P_0(AF) = {}^*P_0(A) > \epsilon > 0$,

$$\int_F {}^*E_0({}^*x(t) \mid {}^*\mathscr{F}_{0s}) - {}^*E_0(X(t) \mid \mathscr{A}_s)\mathrm{d}^*P_0$$

$$\geq \int_{AF} {}^*E_0({}^*x(t) \mid {}^*\mathscr{F}_{0s}) - {}^*E_0({}^*X(t) \mid \mathscr{A}_s)\mathrm{d}^*P_0$$

$$> \epsilon_0\epsilon > 0$$

矛盾。 □

4 θ的逆像

给定一个标准过程x,我们可以找到它的近初等过程X,它是定义在$TX^*\Omega_0$上的内过程,并取*二进制的值。由定理2,在近强等价的意义下它是唯一的。

现在考虑逆映射的存在性,首先如果逆映射存在,由定理2,在无区别的意义下它是唯一的。我们先证一个命题。

命题**17** 设$T_0 \subset T \subset {}^*T_0$, T为*有限集,其内基数$\|T\| = \gamma$,对于任意的正无穷大自然数$H \leq \gamma$,存在T的*有限子集T', $\|T'\| = H$,且

$$T_0 \subset T' \subset T \subset {}^*T_0$$

证明 定义内二元关系

$$\Phi = \{< t, T'> \in {}^*T_0 \times \mathscr{P}_f(T) : t \in T', \ \|T'\| = H\}$$

则可证它在$T_0 \subset \mathrm{dom}\Phi = {}^*T_0$上共尾。事实上,若有$< t_i, T_i> \in \Phi$, $i = 1, \cdots, n$,任取T的一个*有限子集$T'_0 = \{t'_1, \cdots, t'_H\}$,并用$t_i$, $i = 1, \cdots, n$代替相应的t'_i, $i = 1, \cdots, n$. 记$T_0 = \{t_1, \cdots, t_n, t'_{(n+1)}, \cdots, t'_H\}$,则$T_0$仍是*有限内集,且$< t_i, T_0> \in \Phi$, $i = 1, \cdots, n$. 由k饱和性及$\mathrm{Card}(T_0) < k$可知,存在$T' \in \mathscr{P}_f(T)$, $\|T'\| = H$,使得对任意的$t \in T_0$,有$t \in T'$. □

设X为Ω_0上的S可积的内过程,则对任意的$\eta \in {}^*\mathrm{N}_\infty$,如定理1之(2),取

$$Y = \begin{cases} X_{[\eta]} & X > 0 \\ -(-X_{[\eta]}) & X < 0 \end{cases}$$

则

$$Y = \sum_{k=-\eta}^{\eta} a_k(t, \omega) 2^{-k} \tag{18}$$

且

$$\sum_{t \in T} X(t) - Y(t) \approx 0 \tag{19}$$

因此,下面不妨设S可积的内过程具有(18)的形式。

定理**18** 设内过程X为S可积,则存在*有限集T_1,使得$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T$,内集$\Omega_1$满足: $\Omega_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq {}^*\Omega_0$以及标准过程$x$使得

$$\sum_{t\in T} |X(t) - {}^*x(t)| \approx 0, \omega\in\Omega_1 \tag{20}$$

证明 不妨设 X 有(18)的形式,而且因为 X 为 S 可积,故 X 取有限值,$n.s.$ 假定 X 非负,即

$$X = \sum_{k=-m}^{\eta} a_k \quad 2^{-k}$$

其中 m 为某自然数,$a_k(\cdot,\cdot)$ 为定义在 $T\times\Omega_0$ 上的内函数,取 0 或 1. 考虑* 有限序列$(a_k(\cdot,\cdot))_{k=-m}^{\eta}$在 $T_0\times\Omega_0$ 上限制的外序列 $(a_k(\ ,\ ))_{k=-m}^{\eta}$

并令
$$x(t_0,\Omega_0) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(t_0,\Omega_0)2^{-k}$$

它为定义在 $T_0\times\Omega_0$ 上的标准函数。它的* 标准扩张

$$^*x(t,\omega) = \sum_{k\le -m \text{或} k\in -\mathrm{N}} b_k(t,\omega) \quad 2^{-k}$$

记$^*\mathrm{N}_\eta = \{k\in{}^*\mathrm{N}: k\le\eta\}$,对于任意的$(t_0,\omega_0)\in T_0\times\Omega_0$,内集

$$A = \{k\in{}^*\mathrm{N}_\eta: b_k(t_0,\omega_0) = a_k(t_0,\omega_0)\}$$

包含N,因此存在正无穷大自然数 H_{t_0,ω_0},使任意的 $k\le H_{t_0,\omega_0}$有 $k\in A$,记 $\mathscr{Q}=\{g\in\mathscr{P}({}^*\mathrm{N}\times T\times{}^*\Omega_0\times{}^*\mathrm{N}), g$ 为内函数$\}$

$$\mathscr{G}=\{g\in\mathscr{Q}: \forall(n,t,\omega)\in\mathrm{dom}(g), g(n,t,\omega)>n,$$
$$\forall k\le g(n,t,\omega): b_k(t,\omega) = a_k(t,\omega)\}$$

定义内二元关系:

$$\Phi = \{\langle g_1,g_2\rangle\in\mathscr{G}\times\mathscr{G}: g_2 \text{ 为 } g_1 \text{ 之延拓}\}$$

对 $n\in\mathrm{N}$, $t_o\in T_0$, $\omega_0\in\Omega_0$,定义函数

$$f_0 = \langle\langle n,t_0,\omega_0\rangle, H_{t_0,\omega_0}\rangle\in\mathscr{G}$$

则 $\mathscr{G}'=\{f_0:(n,t_0,\omega_0)\in\mathrm{N}\times T_0\times\Omega_0\}\subseteq\mathscr{G}$ dom(Φ). 易证 Φ 在 $\mathscr{G}'$上共尾,Card$(\mathscr{G}')<k$,因而在 k 饱和模型中,存在 $g\in\mathscr{G}$,使对任意的$f\in\mathscr{G}'$, $\langle f,g\rangle\in\Phi$, 于是 dom$(g) = \mathrm{N}'\times T'\times\Omega'\supseteq\mathrm{N}\times T_0\times\Omega_0$,故存在 $H\in{}^*\mathrm{N}_\infty$,使对任意的 $t\in T'$, $\omega\in\Omega'$, $k\le g(H,t,\omega)$时,$b_k(t,\omega) = a_k(t,\omega)$,记 $\|T'\| = \gamma'$,取 $H' = \min(\log_2\epsilon + H, \log_2\gamma)$,则 $2^{H'}\le\min(\gamma,\epsilon)$. 应用命题 17, T_0 可以被嵌入到 T' 的一个内基数为 $2^{H'}$的* 有限集 T_1 中,记 $T_1 = \{t_1,\cdots,t_{2^{H'}}\}$, $\Omega_1 = \Omega'$

则当 $\omega\in\Omega_1$ 时,

$$\sum_{t\in T_1} |X(t,\omega) - {}^*x(t,\omega)| \le \sum_{t\in T_1}\sum_{k=H+1}^{\eta} 2^{-k} \le 2^{(H'-H)} \le \epsilon\approx 0$$

$$\sum_{t\in T_1} \|X(t) - {}^*x(t)\|_p \approx 0 \tag{19}$$

对于一般的过程,分别讨论其正部与负部则得。□

参考文献

1 Nelson E. Radically elementary probability theory. The Annals of Mathematics Studies, Princedon University Press, 1987: 80～93

2 Anderson R M. Star-Finite Representation of Measure Space. Tras Amer. Math. Soc. 271, 1987: 667～687

3 Albeverios S, Fenstad J E. Hoegh-Krohn, Lindstrom, T. Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics, New York: Acacemic Press, 1992

4 Loeb A A. nonstandard representation of measurable spaces. L_∞ and L_∞^*. In Contributions to Nonstandard analysis(W, A. J. Luxemberg and A. Robinson eds) North-Holland Pub. Amsterdam, 1978: 65～80

5 Halmos P R. 测度论. 王建华译. 北京: 科学出版社, 1958