

对 DJ 小波 VisuShrink 去噪法中 j_0 取值的分析*

何焰兰 秦石桥 苏勇 杨彦

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

摘要 DJ 小波 VisuShrink 去噪法在数字信号处理方面的应用已十分广泛,但是去噪后恢复信号质量的优劣与低分辨率截断参数 j_0 的选取是密切相关的,而 j_0 的选取又与被污染信号的噪声指数 σ 以及采样率有关。这篇文章对这些关系进行了分析,并给出了仿真计算的结果,分析与计算的结论对如何选取最佳低分辨率截断参数 j_0 具有一定的指导意义。

关键词 小波去噪, 波形恢复, VisuShrink 法

分类号 O59

Analysis of the Parameter j_0 in DJ's VisuShrink Denoising

He Yanlan Qin Shiqiao Su Yong Yang Yan

(Department of Applied Physics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The method of DJ's VisuShrink denoising has been applied widely in digital signal processing. But the quality of the signal restored from noise is related to the parameter j_0 , the low-resolution cutoff, and that the selecting of j_0 is related to the noise power σ of a signal corrupted by an additive noise and the sampling rate of the signal. This article analyzes these relationships among these parameters and gives many simulation results. These results have significant meanings in selecting the parameter j_0 .

Key words wavelet denoising, waveform restoration, VisuShrink

1 DJ 的 VisuShrink 去噪法概述

一个源信号 $s(t)$, 被一加性噪声污染, 则数字接收输出 x_i 可用下列方程表示:

$$x_i = s(t_i) + e_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

这里, $t_i = \frac{i}{n}$, e_i 是独立同分布 $N(0, \sigma^2)$, $s(\cdot)$ 是需要恢复的未知函数。我们要测量一个估计值 $\hat{f}(\cdot)$ 对于采样点的平方误差性能。设 $s = (s(t_i))_{i=1}^n$ 和 $\hat{s} = (\hat{s}(t_i))_{i=1}^n$ 分别代表真实值向量和估计样值向量, 并设

$\|s\|_{2,n}^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2$ 表示通常的 l_n^2 平方模, 用风险率 R 作为考核其性能的标准

$$R(\hat{s}, s) = n^{-1} \|\hat{s} - s\|_{2,n}^2 \quad (2)$$

我们希望它尽可能地小。

Donoho 和 Johnstone^[1] 提出了通过选择适当小波系数重构的空间适应方法, 去除信号噪声, 得到对源信号的一个估计值。

设一有限的离散小波变换, 假设有数据 $x = (x_i)_{i=1}^n$, $n = 2^{J+1}$, 对于消失矩阶数为 M , 支集宽度为 S 的波函数, 可以构造一个 $n \times n$ 正交矩阵 W , 即有限的小波变换矩阵。这个矩阵通过 $d = Wx$ 的变换产生了一个 x 的小波系数向量 d , 同时有逆向方程 $x = W^T d$ 。或者有 $x = W^T d_+ + \sigma W^T d_0$ 。

这个向量有 $n = 2^{J+1}$ 个元素, 用二进制序号可很方便地将 $n-1 = 2^{J+1} - 1$ 个元素表成下列形式:

* 1998年3月20日收稿
第一作者: 何焰兰, 女, 1962年生, 讲师

$$\mathbf{d} = (d_{jk})^T, j = -1, 0, \dots, J, k = 0, \dots, 2^j - 1)^T \quad (3)$$

可用图 1 表示。

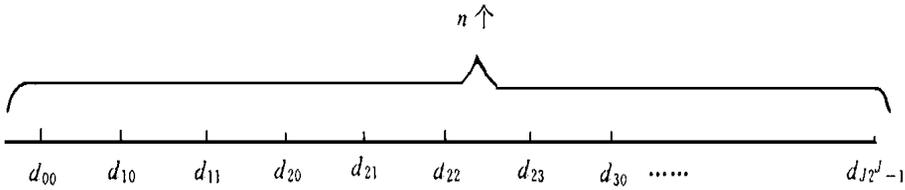


图 1 小波系数排序图

而剩下的元素设为 $d_{-1,0}$ 。为了描述这些系数, 让 W_{jk} 代表 W 的 (j, k) 列。这个逆向方程 $x = W^T \mathbf{d}$ 变为

$$x_i = \sum_{jk} d_{jk} W_{jk}(i) \quad (4)$$

表示 x 作为具有系数 d_{jk} 的基本元素 W_{jk} 之和, 称 W_{jk} 为小波。向量 W_{jk} 看成 i 的函数, 对于 j 和 k 限制其远离极限的情况

$$j_0 \leq j \ll n, 0 \ll k \ll 2^j \quad (5)$$

近似有

$$n^{1/2} W_{jk}(i) \approx 2^{j/2} \Psi(2^j t - k) \quad (t = i/n) \quad (6)$$

其中 $\Psi(t)$ 为母小波函数。向量 W_{jk} 在 (5) 式以外的情形有两种。首先, 那些 $j < j_0$ 的小波变换系数不再与母小波相似了, 即不能通过母小波的伸缩变换而得到, 也不再具有局部性质。事实上, 它们的支集可以是整个 $(0, 1)$ 的长度, 因此, 它们具有低频的特征。其次, 那些 $j \geq j_0$, 但 k 值在 0 和 2^j 边界附近的小波变换系数也不满足 (6) 式。

选择 Daubechies 的 Symmlet 小波作为母小波, 此时, Symmlet 的系数个数 $N = 8$, 消失矩阶数 $M = 7$ 和支集长度 $S = 8$ 。DJ 的 VisuShrink 去噪算法定义如下:

设 \mathbf{d}_s 的一个估计 $\hat{\mathbf{d}}_s = W^T \bar{\mathbf{w}}_s$, $\bar{\mathbf{w}}_s$ 的分量 $\bar{w}_s(j, k)$ 由下式给出

$$\bar{w}_s(j, k) = \begin{cases} w(j, k) & 0 \leq j < j_0 \\ \hat{w}_s(j, k) & j_0 \leq j < J + 1 \end{cases} \quad (7)$$

j_0 是一个关键的分界点, 也称为低分辨率截断参数, $\hat{w}_s(j, k)$ 可由所谓的软门限算出

$$\hat{w}_s(j, k) = \begin{cases} \text{sgn}(w(j, k)) (|w(j, k)| - \sigma \sqrt{2 \ln n}) & |w(j, k)| > \sigma \sqrt{2 \ln n} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (8)$$

定理 1 设源信号 $s(t)$ 是连续可微的, 小波函数 $\Psi(t)$ 相应于 $\mathcal{Q}(t)$ 有 $\Gamma(1)$ 阶消失矩, 则存在一个整数 $j_0 (0 \leq j_0 \leq J)$, 使得

$$E \{ \bar{s}(t) - s(t) \}^2 \leq 4 \max \left\{ \tau^2, \frac{\ln(n) + 1}{n} [(2^{j_0} + 1) \sigma^2 + \sum_{j > j_0} d_s^2(j; i)] \right\} \quad (9)$$

j_0 即为低分辨率截止值。

2 仿真计算与分析

我们选取在信号处理中具有代表性的七种信号作为源信号, 其波形见图 2。并在其上叠加不同 σ 指数的高斯噪声序列, 用 DJ 的 VisuShrink 小波变换去噪法对其进行仿真计算分析。

2.1 信噪比及采样率不变时, 风险率值随 j_0 取值的变化

取采样点数 $n = 2048$, 信噪比值均为 11.7 dB, 计算七种信号对应不同的 j_0 值时, 去噪后重构波形与原信号波形之间的均方差值, 也即风险率值。图 3 是七种信号加噪后的图形。图 4 显示的是去噪后的风险率值随 j_0 值变化的图, j_0 从 1 取到 11。本文里所有图形的数据均是 10 次平均的结果。

可以看出, 同一种函数在相同信噪比下相应于去噪后的均方误差 (即风险率) 而言都有一最佳 j_0

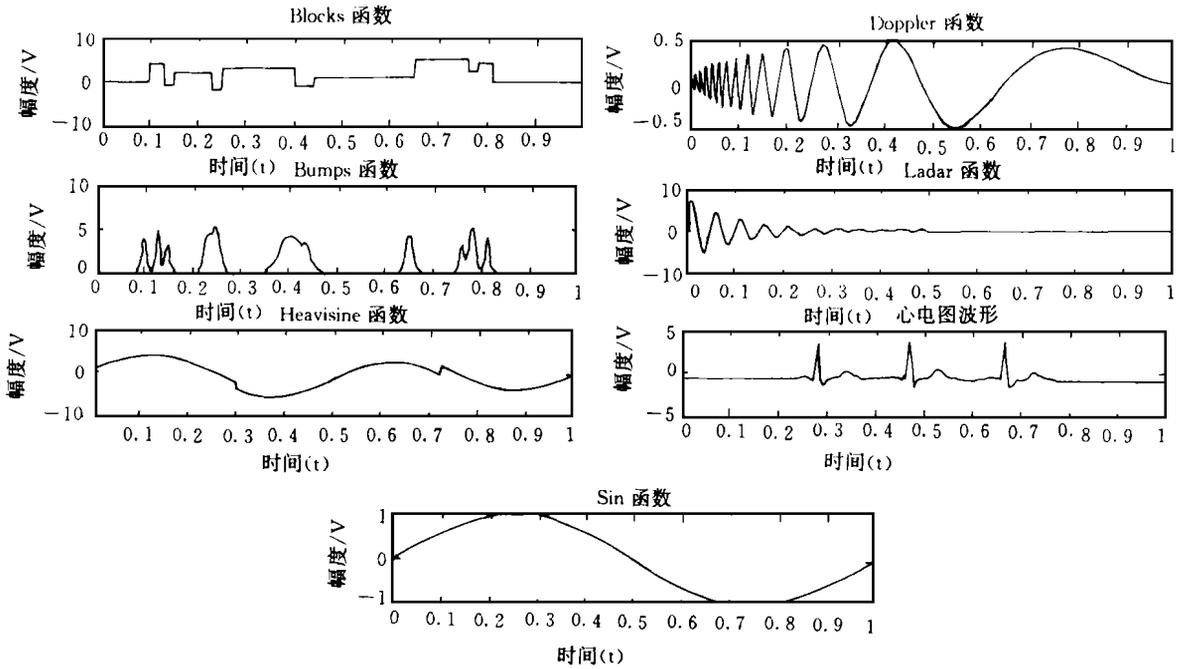


图2 七种具有代表性的源信号 ($n = 2048$)

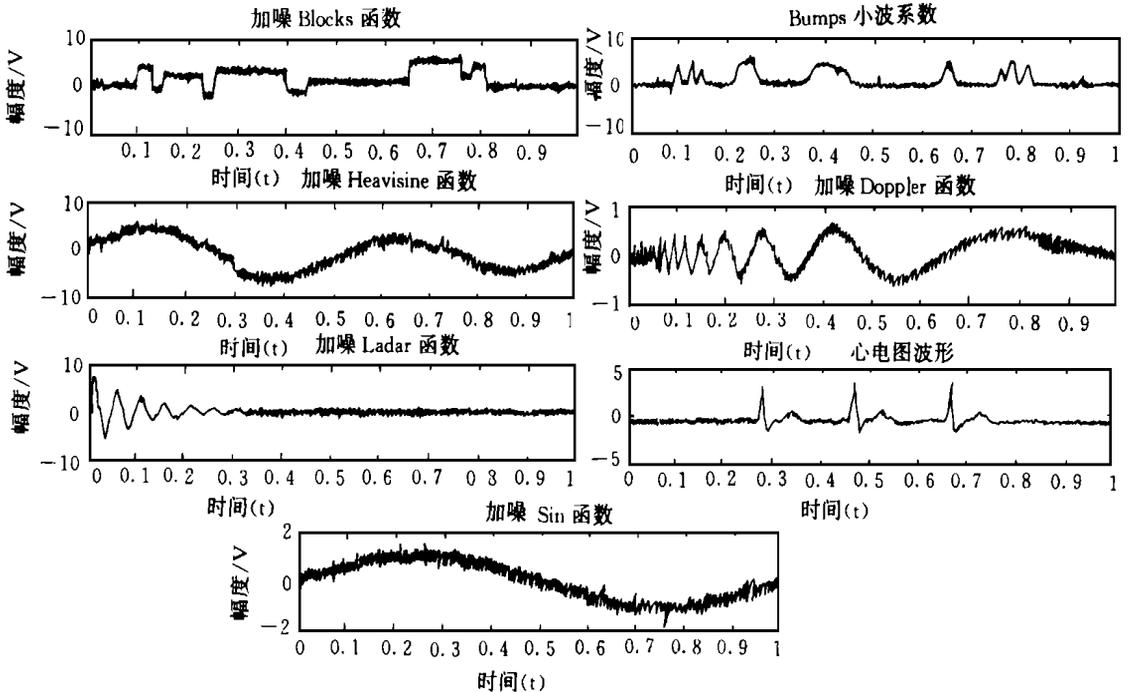


图3 七种信号加噪后的波形 ($n = 2048, S/N = 11.7\text{dB}$)

值, 即此时去噪后的均方误差与取其它 j_0 值时去噪后的均方误差相比为最小。最佳 j_0 值分别为 8, 8, 6, 7, 7, 8, 3, 其重构后的图形示于图 5, 可以看出, 对于选取最佳 j_0 值去噪后的重构图来说, 其视觉效果也是最好的。同时也可以看出, 不同函数在相同信噪比下的最佳 j_0 值不一定相同, 因为不同函数的时-空尺度的特征位置不同, 实际频率变化大的对应较大的最佳 j_0 值, 反之最佳 j_0 值较小。

不同信号的最佳 j_0 值不同的原因, 也可以从其小波变换后的系数排列的情况看出。下面, 对七种源信号进行小波变换, 其小波变换后的系数图见图 6 所示, 排列顺序与图 1 相同。

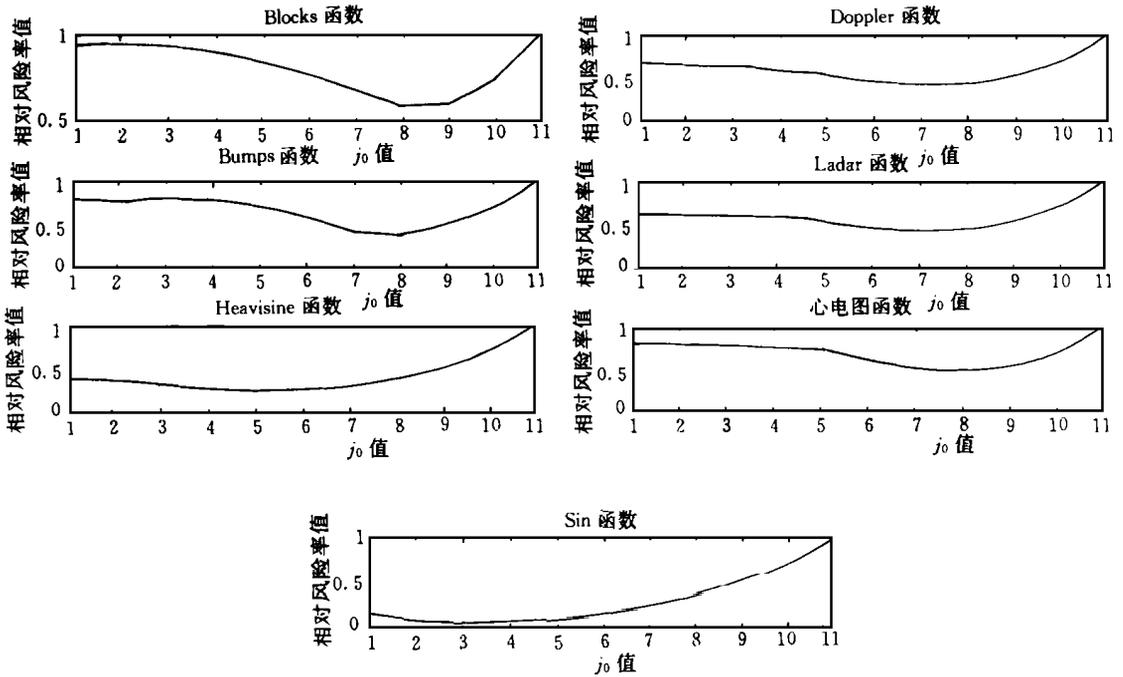


图 4 相对风险率值随 j_0 取值的变化图 ($n = 2048, S/N = 11.7\text{dB}$)

可以看出, 图 6 中 (a)、(b)、(f) 图中系数值较大者分散程度比 (c)、(d)、(e)、(g) 图中的分散程度大些, 而 (g) 图中大系数值最集中。与图 3 比较可以得出, 最佳 j_0 值的大小同该函数经过小波变换后的大系数值的分散程度有关, 分得越散, 最佳 j_0 值大, 反之, 最佳 j_0 值就较小。由此可得出结论, 在 VisuShrink 去噪法中, 采样率与信噪比一定的情形下, 最佳 j_0 值的选取由小波大系数的分散程度来决定。

2.2 同一函数在采样率一定时, j_0 的最佳取值随信噪比的变化

同一函数在采样点数目相同而信噪比值不同时, 最佳 j_0 值也将不相同, 由于篇幅有限, 我们仅示以 Bumps 函数的例图, 其余省略, 但结论一致。图 7 显示了 Bumps 函数在采样数目 $n = 2048$ 时, 最佳 j_0 取值随信噪比变化的情形。

从图 7 看出, 最佳 j_0 值与信噪比的大小有关, 当信噪比减少时, 最佳 j_0 值也将随着减少。设如下的小波变换

$$d = Wx = Ws + We = d_s + d_e \quad (10)$$

写成向量形式有:

$$\begin{pmatrix} d^1 \\ d^{2^0} \\ d^{2^0+1} \\ \vdots \\ d^k \\ \vdots \\ d^{2^j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_s^1 \\ d_s^{2^0} \\ d_s^{2^0+1} \\ \vdots \\ d_s^k \\ \vdots \\ d_s^{2^j+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_e^1 \\ d_e^{2^0} \\ d_e^{2^0+1} \\ \vdots \\ d_e^k \\ \vdots \\ d_e^{2^j+1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

由于小波变换是正交变换, 因此, 噪声是均匀分布于整个小波变换轴上的, 也因此一定存在某个 j_0^* 值, 权且把它当作最佳 j_0 值, 当 $k > 2^{j_0^*}$ 时, 若信噪比值较小, 由 [1] 中性质 1, 2 知, 大部分 d_s 系数都将小于 d_e 系数值, 此时, 若选取 $j_0 > j_0^*$, 等于多选进了 $(2^{j_0^*} - 2^{j_0})$ 个掩盖了有用信息的噪声项, 使细节的可视

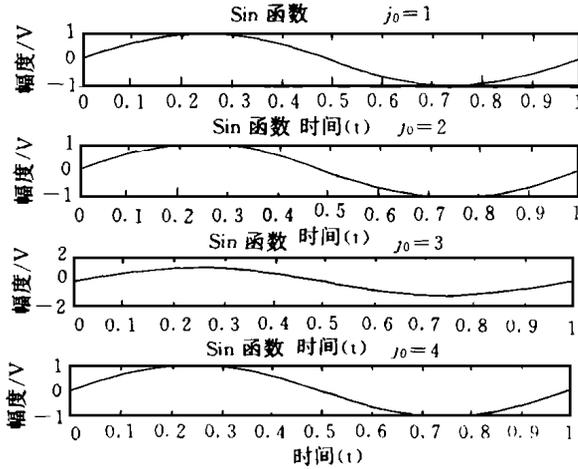


图5 $n=2048, S/N=11.7\text{dB}$

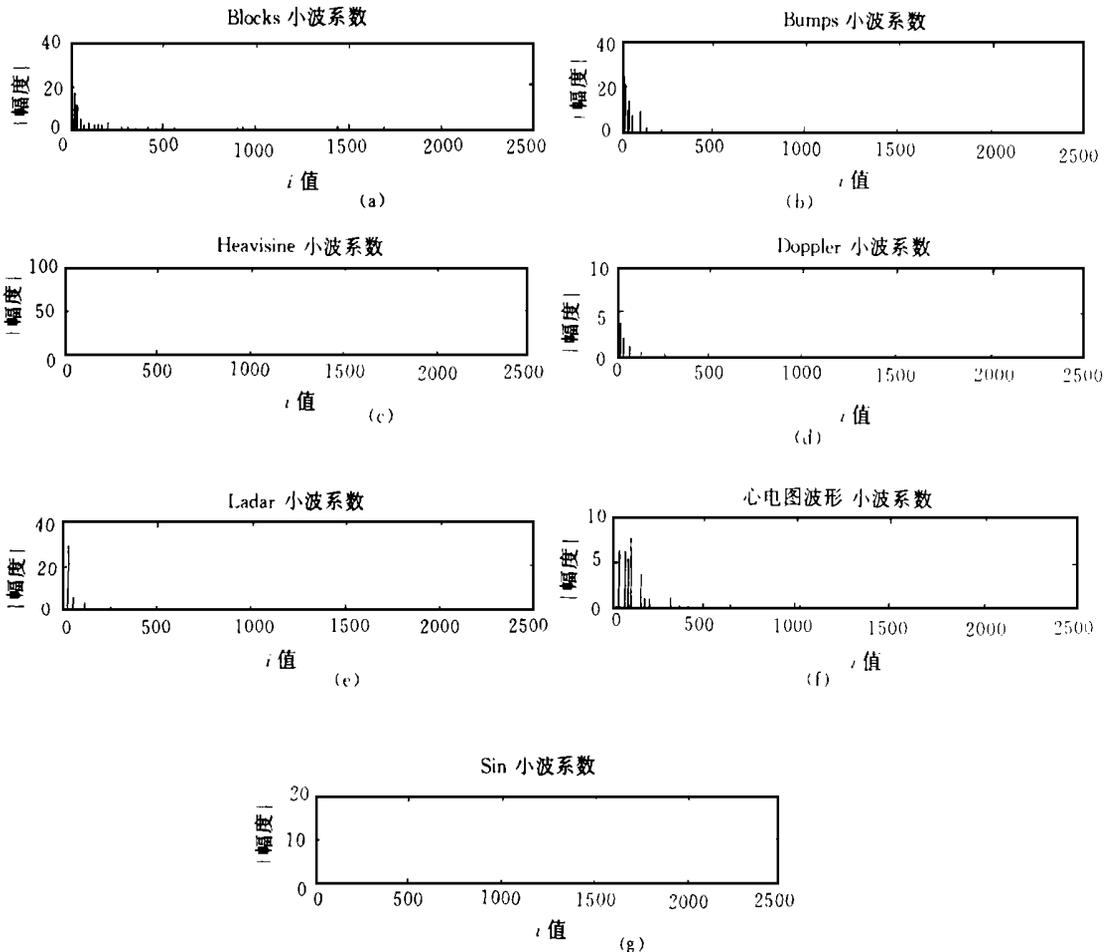


图6 七种源信号小波变换系统排列图

程度更差一些, 所以只取 j_0^* 值才有意义, 并且 j_0^* 随信噪比的减小而减小。当然 j_0^* 越小, 去噪后恢复的信号与原信号相比将有很大的差别, 以至于无意义, 也即当信号信噪比太小时, DJ 的去噪法将无法应用。同时, 由第 1 节定理 1 知, 风险率因子的上限与 (9) 式右边括号中 $(2^{j_0} + 1)\sigma^2$ 项有关, 仿真计算中, 改变信噪比值, 是通过改变 σ 值来实现的, 因此, σ 值越大, 信噪比值越小, 风险率上限值也越大。若要使风险率上限值尽可能小, 可通过减少 j_0 值来实现。因此, 最佳 j_0 值在采样率固定时, 既与小波系数的聚散程度有关, 又与信噪比值 (也即 σ 值) 有关。

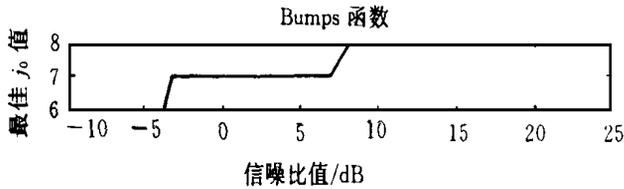


图7 Bumps 函数 j_0 的最佳取值随信噪比变化图

2.3 信噪比值一定时, 风险率值随采样数目的变化

当给定一信噪比值时, 我们来计算函数去噪重构后的风险率值随采样点数目 n 变化的情况, 篇幅有限, 又只显示 Bumps 函数一例。图8是显示 Bumps 函数在 $S/N = 3.7\text{dB}$ 下最佳 j_0 值随 n 值的变化情况, 此时, $M = 7, 8, \dots, 15$, 而 $n = 2^M$, 即 n 为 128, 256, \dots , 32768, 可以看出在信噪比固定的情况下, 随着 n 的增大, 去噪后的风险率值将减小, 并且最佳 j_0 值也将随之增大, 去噪的效果也更佳。同时, 由于有式(5)的近似, 才有式(6)的表示。因此, 采样点数 n 越大, 该算法的近似程度也越高, 去噪恢复后的波形也越接近原波形。

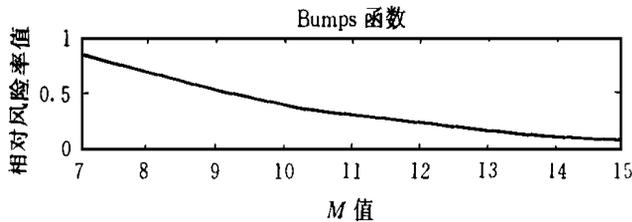


图8 Bumps 的相对风险率值随采样数目的变化 $S/N = 3.7\text{dB}$

故可知, 对某一信号来说, 当信噪比固定时, 最佳 j_0 值将随着采样点数目的增加而增加, 与此同时, 风险率值将随之减少。因此在对信号进行处理时, 尽可能对信号进行过采样, 有助于提高信号恢复的质量。

3 结束语

由前节的仿真计算与分析, 可得出如下结论: 在 DJ 的 VisuShrink 的去噪算法中, j_0 确实是个相当重要的量, 选取不同的 j_0 , 去噪后的信噪比有明显差异。如果选取得不恰当, 则有可能达不到理想的去噪效果, 甚至扭曲原信号。一般情况下, 对于任一需去噪的信号来说, 我们可能无任何关于信号本身正则性的先验知识, 因此, 在尽可能过采样的情况下, 为使去噪后的风险率值达到最小, j_0 值的选取可依据上节的分析来设定。确实, 从上节的计算与分析中, 找到了一个统计量, 通过对其进行计算, 可找出 j_0 的最佳值, 使 DJ 的 VisuShrink 去噪法应用更加广泛, 并对大多数信号来说, 去噪因此具有自适应性。

参考文献

- 1 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*. 1994, 81, 3: 425 ~ 455
- 2 Ching P C, Wu S Q. On Approximated sampling Theorem and Wavelet Denoising for Arbitrary Waveform Restoration, 1995
- 3 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl.* 1988, 41, 909 ~ 966
- 4 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia SIAM, 1992
- 5 Ching P C, Wu S Q. Quadrature Mirror Filter Decomposition And Multiresolution Approximation, 1994