国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第1期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 1 1999

一种改进的变步长归一化LMS算法*

李盈颖　万建伟　周良柱

(国防科技大学电子技术系　长沙　410073)

摘　要　在以往的基于LMS算法的研究中，归一化LMS算法（NLMS）增大了算法的动态输入范围，但该算法对噪声很敏感。引入自相关的变步长LMS算法（VSSLMS）不仅加快了收敛速度，可在非平稳状态下进行快速跟踪，而且消除了独立噪声的干扰，但它无法适应大范围的动态输入。本文综合它们的优点而得到的算法，在低信噪比和大范围的动态输入情况下都有良好的性能。

关键词　归一化，变步长，自相关，失调量

分类号　TN713

A Refrained Variable Step-size Normazied LMS Algorithm

Li Yingying　Wan Jianwei　Zhou Liangzhu

(Department of electric technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　We have known from the past research based on the LMS algorithm that normazied LMS (NLMS) algorithm enlarges the dynamic range of input, but it is highly sensitive to the noise disturbance. Variable step-size LMS algorithm (VSSLMS) which uses auto-correlation of errors can provide fast convergence, eliminate the influence of independent noise, thus give good performance in non-stationary environment. But it can not perform well with input which has large dynamic range. This paper combinates their advantages, and the new algorithm can perform well both in the environment of low SNR and the environment with large dynamic range of input.

Key words　NLMS, VSSLMS, auto-correlation, misadjustment

LMS算法因其结构简单、稳定性好，一直是自适应滤波经典、有效的算法之一。在以往有关的研究中，提出了很多改进的算法。其中归一化最小均方误差（NLMS）算法，因其结构简单，具有大的输入动态范围，被广泛采用，但它受噪声影响较大。变步长最小均方误差（VSSLMS）算法在大的误差范围内有快速收敛性，在小的误差范围内有较小的失调量，提高了跟踪性能；在变步长的迭代中引入误差的自相关，非常有效地消除了独立噪声的干扰，但它不能适应大的动态输入。本文结合NLMS算法和引入误差自相关的VSSLMS算法提出了一种改进的变步长NLMS算法，不仅应用于时变系统时，有良好的跟踪性能，有效去除了独立噪声的影响，在信噪比较低的情况下，算法也有良好的性能，而且有较大的动态输入范围。

1　算法分析

在基本LMS算法中：

$$\begin{cases} e(n) = d(n) - X^{\mathrm{T}}(n)W(n) \\ W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)X(n) \end{cases} \tag{1}$$

其中$d(n)$为期望输出，$e(n)$为误差，$W(n)$为迭代的权值，μ为迭代步长。当μ一定时，自适应滤波器的收敛速度取决于输入序列自相关矩阵R的最小特征值$\lambda_{\min}$，而总失调量主要取决于最大特征值$\lambda_{\max}$。R的特征值随输入信号的改变而改变，影响收敛速度和失调，甚至可能破坏收敛条件，于是提出了NLMS算法[1]：

$$\begin{cases} e(n) = d(n) - X^{T}(n)W(n) \\ W(n+1) = W(n) + \mu e(n)X^{T}(n)X(n)^{-1}X^{T}(n) \end{cases} \tag{2}$$

* 1998年9月2日收稿
第一作者：李盈颖，女，1975年生，硕士

相当于用 $\mu(n)=\mu(X^T(n)X(n))^{-1}=\frac{\mu}{p_j}$ 代替了 μ, p_j 为输入功率归一化值。均方误差的收敛时间为: $\tau=T_s/(4\mu\lambda_i/p_j)$; 稳态失调为: $M=(\mu/p_j)\mathrm{tr}[R]$。因 λ 与 $\mathrm{tr}[R]$ 均与 p_j 成比例, 因而 p_j 的引入可使LMS算法性能保持稳定并扩大了它输入的动态范围。

基本 LMS 为固定步长调整, 为加快其收敛速度, VSSLMS 以变步长的 $\mu(n)$ 代替了固定的 μ, 表示式为

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n)-X^T(n)W(n) \\ W(n+1) &= W(n)+\mu(n)e(n)X(n) \\ \mu(n+1) &= \alpha\mu(n)+\gamma e^2(n) \end{aligned} \tag{3}$$

假设在白噪声存在的情况下, 对这种算法做简单的分析, 此时的期望值应为:

$$d(n)=X^T(n)W^*(n)+\xi(n)$$

式中, $\xi(n)$ 是零均值白噪声, $W^*(n)$ 是时变的最佳权矢量。把上式代入步长迭代公式中, 得到:

$$\mu(n+1)=\alpha\mu(n)+\gamma V^{\mathrm{T}}(n)X(n)X^{\mathrm{T}}(n)V(n)+\gamma\xi^2(n)-2\gamma\xi(n)V^{\mathrm{T}}(n)X(n)$$

$$E\{\mu(n+1)\}=\alpha E\{\mu(n)\}+\gamma(E\{\xi^2(n)\}+E\{\mathring{V}^T(n)\Lambda\mathring{V}(n)\})$$

其中 $V(n)=W(n)-W^*(n)$, $X(n)X^{\mathrm{T}}(n)=R$ 为自相关矩阵, 可被表示为: $R=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$, $\mathring{V}(n)=Q^TV(n)$。其中 $E\{\mathring{V}^{\mathrm{T}}(n)\Lambda\mathring{V}(n)\}$ 反映了此时权值距最佳权值的距离, 我们希望最佳权值根据它的大小来调整。但由于 $E\{\xi^2(n)\}$ 出现, 使其不能精确调整。由以上分析可知, 这种算法的性能受噪声干扰明显。

在文 [2] 中引入 $p(n)$ 作为对 $e(n)$ 和 $e(n-1)$ 的估计, 使步长的迭代根据 $e(n)$ 和 $e(n-1)$ 自相关的时域平均估计变化, 可使算法不受非相关噪声的影响。引入迭代:

$$\begin{aligned} p(n) &= \beta p(n-1)+(1-\beta)e(n)e(n-1) \\ \mu(n+1) &= \alpha\mu(n)+\gamma p(n)^2 \end{aligned}$$

在迭代初始, $p(n)$ 很大, 有较快的收敛速度, 当达到最佳权值附近时, 误差的自相关很小, $p(n)$ 很小, 得到一个小的步长因子。由上两式看出, 单个样本的误差对 $p(n)$ 的影响由$(1-\beta)$ 加权, 大大减少了白噪声的干扰。此时, 迭代可被重写为:

$$\mu(n+1)=\alpha\mu(n)+\gamma\{E\{V^{\mathrm{T}}(n)X(n)X^{\mathrm{T}}(n-1)V(n-1)\}\}$$

由上式可见, $\mu(n)$ 的迭代取决于离最佳权值的远近并不受白噪声的干扰, 在低信噪比时有稳定的性能, 但它并不适用于大动态输入范围的情况。

归一化 LMS 算法引入归一化功率可扩大 LMS 的滤波的动态范围。引入对误差 $e(n)$, $e(n-1)$ 的自相关估计的VSSLMS 算法具有快速收敛和跟踪的能力, 并有效地去除独立噪声的干扰, 这两种算法对 LMS 算法的改进并不矛盾, 得到改进的 LMS 算法如下:

$$\begin{cases} e(n)=d(n)-X^{\mathrm{T}}(n)W(n) \\ p(n)=\beta p(n-1)+(1-\beta)e(n)e(n-1) \\ \mu(n+1)=\alpha\mu(n)+\gamma p(n)^2 \\ W(n+1)=W(n)+\mu(n+1)e(n)(X_K^TX_K)^{-1}X_K^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{4}$$

这时:

$$\begin{aligned} E[\mu(n+1)] &= \alpha E[\mu(n)]+\gamma\beta^2E[P^2(n-1)] \\ &+\gamma\beta(1-\beta)E[p^2(n-1)]E[\xi^2(n)]+(1-\beta)^2E[\xi^2(n)] \end{aligned}$$

由上式可见, 新算法在输入功率不变而独立噪声很大的情况时, 只要取 $\beta\approx 1$, 就可有效去除非相关噪声的影响。同时以 $\mu(n)/p_i$ 代替了 $\mu(n)$, 在输入功率有大范围的动态变化时, 系统仍能保持稳定。因 $\mu(n)$ 受非相关噪声影响较小, 失调量 $M=(\mu(n)/p_j)\mathrm{tr}[R]$ 受噪声影响也较小, 收敛较稳定。增加的迭带运算牺牲了一定的运算速度与存储空间以提高性能, 但在高速处理器中, 这种牺牲是可以接受。

2 计算机仿真结果分析

下面把本文提出的算法在不同情况分别与 NLMS 算法和 VSSLMS 算法相比较。图 1, 图 2 为在

SNR= 0的情况下, 比较新的算法与NLMS算法的失调量和对跃变权值的跟踪。从图1可看出, NLMS算法对于噪声很敏感, 由于噪声的存在, 迭代稳定后, 仍有较大的失调量, 权值也不能稳定在最佳权值上。而由图2看出, 本文提出的算法, 有效的去除了独立噪声的干扰, 权值稳定。图3为在输入功率变化时, VSSLMS算法与改进的算法的性能比较, 其中输入功率在迭代500点后逐渐增大十倍。可见, 新的算法在功率变化时有明显稳定的性能。仿真使用的信号为输入信号通过系统: $y(n) = x(n) + w_1x(n-1) + w_2x(n-2) + \xi(n)$, 作为期望输出, $x(n)$ 为输入信号。图示为使用各LMS算法对权值 w_1 的迭代及滤波器的误差。

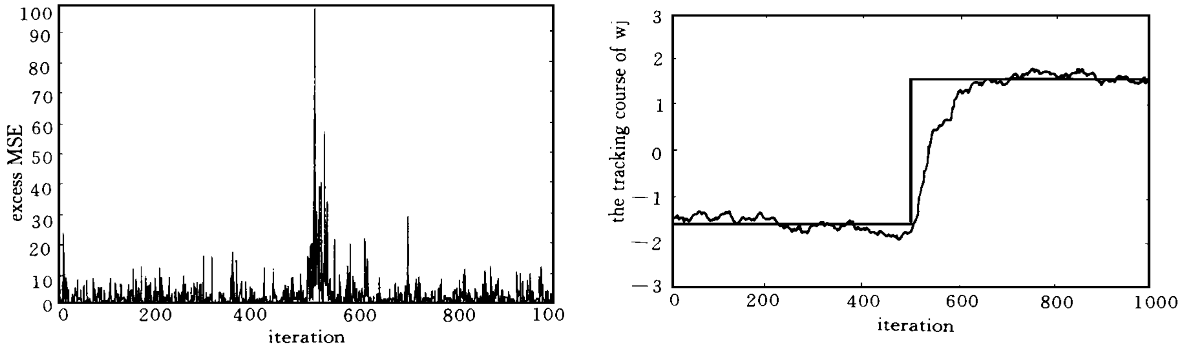

图1 SNR= 0dB时 NLMS算法对阶跃权值的跟踪

Fig. 1 SNR= 0dB excess msz and tracting course of wj with NLMS

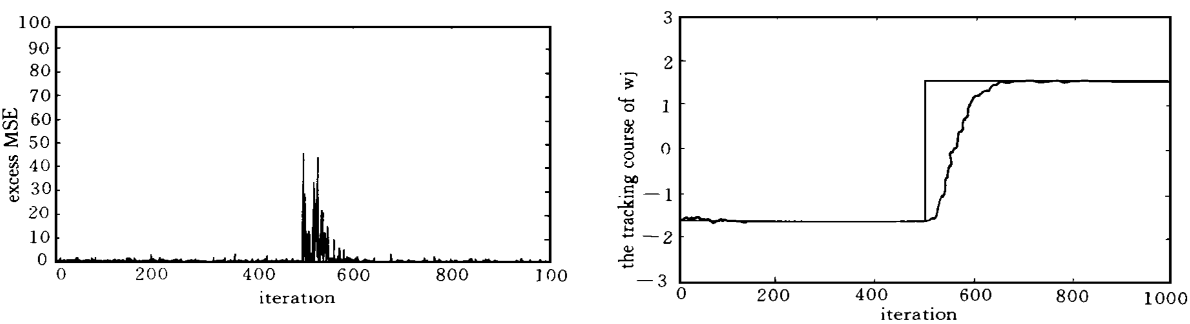

图2 SNR= 0dB时 改进的LMS算法对阶跃权值的跟踪

Fig. 2 SNR= 0dB excess msz and tracking course of brust wj in rerfrained LMS

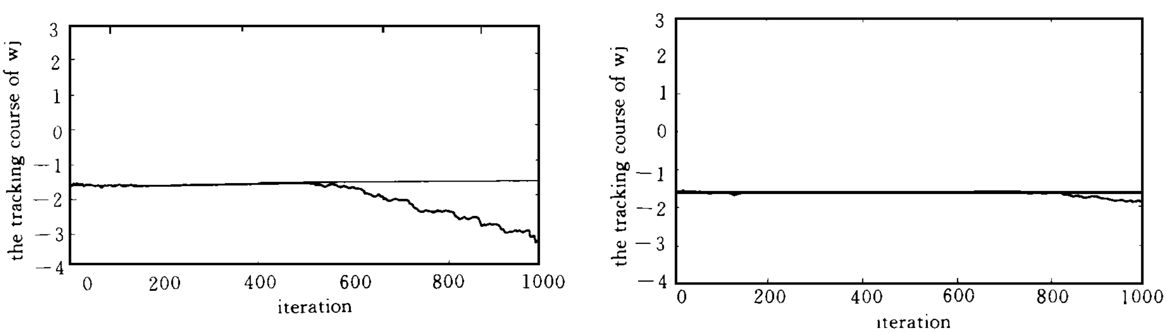

图3 SNR= 0dB时 VSSLMS与改进的LMS算法在功率变化时对权值的跟踪比较

Fig. 3 SNR= 0dB, comparison between VSSLMS and refrained LMS of the tracking couse of wj with varial input poner