随机环境中的 M/M^Y/1 排队系统*

唐有荣

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

刘再明 侯振挺

(长沙铁道学院科研所 长沙 410075)

摘 要 文献[4]讨论了随机环境中的 M/M/1 排队模型,本文提出和讨论随机环境中的 M/M^Y/1 排队模型,在统计平衡条件下给出了队长和等待队长的平稳分布以及平均队长和平均等待队长,得到了等待时间和逗留时间分布以及平均等待时间和平均逗留时间。

关键词 随机环境,队长,等待队长,等待时间,逗留时间

分类号 O22

M/M^Y/1 Queueing Systems in a Random Environment

Tang Yourong

(Department of System Engneering and Mathematics, NUDT, Changsha 410073)

Liu Zaiming Hou Zengting

(Research Department, Changsha Railway Univerity. Changsha 410075)

Abstract With reference [4] relating to the queuing model of M/M/1 in a random environment, this paper poses and deals with the queuing Model of M/M^Y/1 in a random environment. In statistical equilibrium, the author obtains the equilibrium distribution of queue length and that of waiting queue length, the average of queue length and that of waiting queue length as well as the equilibrium distribution of waiting time and that of staying time, the average of waiting time and that of staying time.

Key words random environment, queue length, waiting queue length, waiting time, staying time

1 模型的描述

所谓随机环境中的 $M/M^Y/1$ 排队系统,是指这样的一个随机服务系统:

设(Ω, F, P)为一概率空间,除去一个 P-0 测集外(以后我们假定 $P-0$ 测集已从 Ω 中删掉),$\forall\ \theta\in\Omega$ 满足:

(1) 在时刻 $\tau_1(\omega), \tau_2(\omega), \cdots$,顾客陆续到来,到达时间间隔 $\tau_{m+1}(\theta)-\tau_m(\theta)$ $(m=0,1,2,\cdots,\tau_0(\theta)\equiv 0)$ 是概率空间$(\Omega^{(\theta)}, F^{(\theta)}, P^{(\theta)})$上相互独立,服从参数为 $\lambda_m(\theta)$ 的负指数分布,即:

$$P^{(\theta)}(\tau_{m+1}-\tau_m\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_m(\theta)x} & 若\ x\ge 0\\ 0 & 若\ x<0\end{cases}$$

(2) 每次服务是批量服务,服务批量为$(\Omega^{(\theta)}, F^{(\theta)}, P^{(\theta)})$上的随机变量 $Y_n(\theta)$,其分布为:

$$P^{(\theta)}(Y_n(\theta)=k)=a_k^{(n)}(\theta),\ k=1,2,\cdots,n$$

(假设此时系统中等待服务的顾客数为n),同时我们约定 $P^{(\theta)}(Y_0(\theta)=0)=a_0^{(0)}(\theta)=1$。

(3) 每批顾客的服务时间 $u_n(\theta)$ $(n=1,2\cdots)$ 是概率空间$(\Omega^{(\theta)}, F^{(\theta)}, P^{(\theta)})$上的相互独立,服从参数 $\mu_n(\theta)$ 的负指数分布,即:

* 1998年6月17日收稿
第一作者:唐有荣,男,1966年生,讲师

$$P^{(\theta)}(\upsilon_l(\theta) \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_n(\theta)x} & 若 x \ge 0 \\ 0 & 若 x < 0 \end{cases}$$

(4) $\{Y_n(\theta), \tau_{m+1}(\theta) - \tau_m(\theta), \upsilon(\theta)\}$ ($m = 0, 1, 2, \cdots; l, n = 1, 2, \cdots$) 是概率空间($\Omega^{(\theta)}, F^{(\theta)}, P^{(\theta)}$) 上相互独立的随机变量列。

(5) 服务规则是先到达先服务。

当 θ 在 Ω 中变动时, 就构成随机环境中的 $M/M^Y/1$ 排队系统。

定理 1.1 设 N_t 是在时刻 t 时的队长, 则 N_t 是随机环境中的广生灭过程, 且其密度矩阵为:

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \cdots \\ \mu_1 a_1^{(1)} & -(\mu_1 a_1^{(1)} + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots 0 \cdots \\ \mu_2 a_2^{(2)} & \mu_2 a_1^{(2)} & -(\sum_{i=1}^{2} \mu_2 a_i^{(2)} + \lambda_2) & \lambda_2 & \cdots 0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \mu_n a_n^{(n)} & \mu_n a_{n-1}^{(n)} & \cdots & -(\sum_{i=1}^{n} \mu_n a_i^{(n)} + \lambda_n) & \lambda_n \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

其中: $\lambda_i \equiv \lambda_i(\theta)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots$), $\mu_l \equiv \mu_l(\theta)$, $a_k^{(l)} \equiv a_k^{(l)}(\theta)$ ($l = 1, 2, \cdots, 1 \le k \le l$)
是关于 θ 的随机变量

证明: 任意固定 $\theta \in \Omega$。

在 $N(t, \theta) = j$ 的条件下, $N(t+\Delta t, \theta) = j+1$ 可分解为下列互斥事件之和:

(1) $(t, t+\Delta t)$ 内恰好到达一个顾客, 而正在接受服务的一批顾客还没有结束。

(2) $(t, t+\Delta t)$ 内至少到达二个顾客, 且使 $N(t+\Delta t, \theta) = j+1$, 由负指数分布的性质知

$$P^{(\theta)}(N(t+\Delta t, \theta) = j+1 \ N(t, \theta) = j) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), J = 0, 1, 2, \cdots$$

另一面, 在 $N(t, \theta) = j$ ($j = 1, 2, \cdots$) 的条件下, $N(t+\Delta t, \theta) = j-k$ ($j-k \ge 0$, k 为正整数) 可分解为下列互斥事件之和:

(3) $(t, t+\Delta t)$ 内没有顾客来, 同时恰好服务完一批顾客且服务完的顾客数为 k;

(4) $(t, t+\Delta t)$ 内到达一个顾客, 同时恰好服务完一批顾客且服务完的顾客数为 $k+1$;

(5) $(t, t+\Delta t)$ 内至少到达二个顾客且同时恰好至少服务完一批顾客, 且此时队长为 $j-k$, 由负指数分布的性质有

$$P^{(\theta)}(N(t+\Delta t, \theta) = j-k \ N(t, \theta) = j) =$$
$$e^{-\lambda_j \Delta t} \mu_j \Delta t e^{-\mu_j t} a_k^{(j)} + \lambda_i \Delta t e^{-\lambda_j \Delta t} \mu_{j+1} \Delta t e^{-\mu_{j+1} \Delta t} a_{k+1}^{(j+1)} + o(\Delta t)$$

又显然有: $P^{(\theta)}(N(t+\Delta t, \theta) = j+l \ N(t, \theta) = j) = o(\Delta t)$ ($l \ge 2$)

因此, 当 $\Delta t \to 0$ 时就得到定理 1.1 的密度矩阵 Q, 当 θ 在 Ω 中变动时, 就得到随机环境中的广生灭过程。

2 统计平衡理论

2.1 队长、平均队长

定义 2.1 随机环境中的广生灭过程 N_t 称为"正常返", 如果

$$P(\theta: \theta \in \Omega, N_t(\theta) \text{ 在 } P^{(\theta)} \text{ 之下"正常返"}) = 1 \quad (2.1)$$

由文献[2] 定理 3.2 知, 随机环境中的 $M/M^Y/1$ 排队系统存在平稳分布的充分必要条件是

$$Z_0^0(\theta) = \infty, \mu_k(\theta) < \infty, \forall k \in E \quad (P - a.e) \quad (2.2)$$

在本文中假设(2.2) 式总成立。

定理 2.1 若(2.2) 式成立, 则随机环境中的 $M/M^Y/1$ 排队系统队长 N 存在平稳分布$\{\hat{P}_k, k \ge 0\}$, 且

$$\hat{P}_k = E\left[b_k(\theta) m_{k+1k}(\theta) + \sum_{i=0}^{k-1} a_k^{(i)}(\theta) m_i(\theta) + 1\right]^{-1}$$

其中 $k\geq 0$, E 为概率 P 对应的数学期望, 若求和号的下限大于上限则此和约定为 0。

证明: 由(2.2)式及文献[2]之定理 3.2 知, 除去一个 $P-0$ 测集外, $\forall\,\theta\in\Omega$, $N_t(\theta)$ 在 $P^{(\theta)}$ 之下的平稳分布为

$$p_k(\theta)=\left[b_k(\theta)m_{k+1k}(\theta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_k^{(i)}(\theta)m_i(\theta)+1\right]^{-1}$$

由文献[3]知, 作乘积概率空间 $(\Omega\times\Omega^{(\theta)},F\times F^{(\theta)},\hat{P})$, 其中

$$\hat{P}(A\times B)=\int P^{(\theta)}(B)P(\mathrm{d}\theta)\qquad \forall\ A\in F,B\in F^{(\theta)} \tag{2.3}$$

以及队长 N_t 就是 $(\Omega\times\Omega^{(\theta)},F\times F^{(\theta)},\hat{P})$ 上的随机环境中的广生灭过程, 所以

$$\hat{P}_k\equiv\lim_{t\to\infty}\hat{P}((\theta,\omega):N_t(\theta,\omega)=k)\qquad 其中\quad \theta\in\Omega,\omega\in\Omega^{(\theta)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_\Omega P^{(\theta)}(\omega: N_t(\theta,\omega)=k)P(\mathrm{d}\theta) \tag{2.4}$$

由正常返的定义知, 对几乎一切 $\theta\in\Omega$ 有: $\lim_{t\to\infty}P^{(\theta)}(\omega: N_t(\theta,\omega)=k)=p_k(\theta)$

注意到 $0\leq P^{(\theta)}(\omega: N_t(\theta,\omega)=k)\leq 1$, 由控制收敛定理及(2.4)有

$$\hat{P}_k=\int_\Omega\lim_{t\to\infty}P^{(\theta)}(\omega: N_t(\theta,\omega)=k)P(\mathrm{d}\theta)=\int_\Omega p_k(\theta)P(\mathrm{d}(\theta))$$

$$E(p_k(\theta))=\mathrm{E}\left[b_k(\theta)m_{k+1k}(\theta)+\sum_{i=0}^{k-1}a_k^{(i)}(\theta)m_i(\theta)+1\right]^{-1}$$

推论 2.1 对于随机环境中的 $M/M^Y/1$ 系统, 若(2.2)式成立, 则平均队长 $\bar{N}=\mathrm{E}(\bar{N}(\theta))$, 其中 $\bar{N}(\theta)$ 为固定 $\theta\in\Omega$ 时的平均队长。

证明: $$\bar{N}=\sum_{k=1}^{\infty}k\hat{P}_k=\sum_{k=1}^{\infty}kE(p_k(\theta))=\sum_{k=1}^{\infty}E(kp_k(\theta)) \tag{2.5}$$

再注意, 除去一 P-0 测集外, $\forall\,\theta\in\Omega$, 有 $\sum_{k=1}^{\infty}kp_k(\theta)=\bar{N}(\theta)<\infty$, 由控制收敛定理得

$$\bar{N}=E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}kp_k(\theta)\Big)=E(\bar{N}(\theta))$$

2.2 等待队长, 平均等待队长

定义 2.2 若(2.2)式成立, 则随机环境中的 $M/M^Y/1$ 排队系统的等待队长的平稳分布为:

$$p_k'=\begin{cases}\sum_{i=0}^{\infty}E(p_i(\theta)a_i^{(i)}(\theta)) & (k=0)\\ \sum_{i=k+1}^{\infty}E(p_i(\theta)a_{i-k}^{(i)}(\theta)) & (i>k>0)\end{cases} \tag{2.6}$$

证明: 设 N_t, N_t' 分别表示 t 时刻的队长和等待队长, Y_{N_t} 表示正在服务的顾客数, 则有

$$\begin{cases}N_t'=0 & 若\ N_t=0\\ N_t'=N_t-Y_{N_t}\ 且\ N_t-y_{N_t}\geq 0 & 若\ N_t\neq 0\end{cases}$$

当 $k>0$ 时, 由控制收敛定理有: $\hat{P}_k'=\lim_{t\to\infty}\hat{P}(N_t'=k)=\lim_{t\to\infty}\hat{P}(N_t-Y_{N_t}=k)$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_\Omega P^{(\theta)}(\omega: N_t(\theta,\omega)-Y_{N_t}(\theta,\omega)=k)P(\mathrm{d}\theta) \tag{2.7}$$

固定 $\theta\in\Omega$, 由全概率公式有: $P^{(\theta)}(\omega: N_t(\omega)-Y_{N_t}(\omega)=k)$

$$=\sum_{i=k+1}^{\infty}P^{(\theta)}(\omega: N_t(\omega)=i)P^{(\theta)}(Y_i(\omega)=i-k)\quad (i>k>0) \tag{2.8}$$

因此由(2.7).(2.8)式得

$$\hat{p}_k'\int_\Omega\sum_{i=k+1}^{\infty}p_i(\theta)a_{i-k}^{(i)}(\theta)p(\mathrm{d}\theta)=E\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty}p_i(\theta)a_{i-k}^{(i)}\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}E(p_i(\theta)a_{i-k}^{(i)}(\theta)) \tag{2.9}$$

同理可证 $\hat{p}_0'=\sum_{i=0}^{\infty}E(p_i(\theta)a_i^{(i)}(\theta))$。

推论 2.2 若(2.2)式成立,则随机环境下的 $M/M^Y/1$ 排队系统在统计平衡条件下的平均等待队长 $\bar{N}'$ 为:

$$\bar{N}' = E[E^{(\theta)}(N)] - E(E^{(\theta)}(Y_N\ N)) = E(\sum_{i=1}^{\infty} ip_i(\theta)) - E(\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\theta)\sum_{k=1}^{i} ka_k^{(i)}(\theta)) \qquad (2.10)$$

其中、N, Y_N 分别表示在统计平衡条件下的队长和批服务的顾客数。

证明: 固定 $\theta\in\Omega$, 设 $\{p'_k(\theta), k\geq 0\}$ 表示等待队长的平稳分布

$$\begin{aligned}\bar{N}'(\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp'_k(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(\theta)\, a_{i-k}^{(i)}(\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\sum_{i=k+1}^{\infty} p_i(\theta)\, a_{i-k}^{(i)}(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\theta)\sum_{k=0}^{i-1} ka_{i-k}^{(i)}(\theta)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\theta)\sum_{k=1}^{i}(i-k)\,a_k^{(i)}(\theta)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} ip_i(\theta)\sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)}(\theta) - \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\theta)\sum_{k=1}^{i} ka_k^{(i)}(\theta)\\ &= E^{(\theta)}(N) - E^{(\theta)}(Y_N\ N)\end{aligned}$$

因此由(2.3)式知结论成立。

2.3 等待时间、逗留时间分布

引理 2.1 设 $Y_N(\theta)$ 表示固定 $\theta\in\Omega$ 时在统计平衡条件下批服务的顾客数,若(2.2)式成立,则 $Y_N(\theta)$ 为分布为

$$P^{(\theta)}(Y_N(\theta) = k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i(\theta)\, a_k^{(i)}(\theta) \quad (k = 1, 2, \cdots) \qquad (2.11)$$

证明: 固定 $\theta\in\Omega$, 由全概率公式得:

$$P^{(\theta)}(Y_N(\theta) = k) = \sum_{i=k}^{\infty} P^{(\theta)}(N = i)P^{(\theta)}(Y_i = k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i(\theta)\, a_i^{(i)}(\theta)$$

引理 2.2 设 $V_N(\theta)$ 表示固定 $\theta\in\Omega$ 时每批顾客的服务时间,若(2.2)式成立,则 V_N 的分布函数和密度函数分别为: $\bar{V}_N(t) \equiv P^{(\theta)}(V_N < t) = \sum_{i=1}^{\infty} P^{(\theta)}(N = i)P^{(\theta)}(V_i < t)$

$$= \begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\theta)(1 - e^{-\mu_i(\theta)t}) & t\geq 0\\ 0 & t < 0\end{cases}$$

因此 V_N 的分布密度函数为: $V_N(t) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\theta) p_i(\theta) e^{-\mu_i(\theta)t}) & t\geq 0\\ 0 & t < 0\end{cases}$

定理 2.3 设 W 表示顾客的等待时间,若(2.2)成立,则在统计平衡条件下 W 的分布函数 $W(t)$ 和密度函数 $w(t)$ 分别为: $W(t) \equiv \hat{P}(W\leq t)$

$$= \begin{cases}E(p_0(\theta)) & \text{当 } t = 0\\ E(p_0(\theta)) + \sum_{k=1}^{\infty} E[p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\leq k\\ k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}[\prod_{m=1}^{l+1}(\sum_{i_m=k_m}^{\infty} p_{i_m}(\theta)\, a_{k_m}^{l_m}(\theta))]\int V_N^{(l)*}(x)\,\mathrm{d}x] & t > 0\end{cases} \qquad (2.12)$$

$$w(t) = \begin{cases}E(p_0(\theta)) & \text{当 } t = 0\\ \sum_{k=1}^{\infty} E[p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\leq k\\ k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}[\prod_{m=1}^{l+1}(\sum_{i_m=k_m}^{\infty} p_{i_m}(\theta)\, a_{k_m}^{l_m}(\theta))]V^{(l)*}(t)] & t > 0\end{cases} \qquad (2.13)$$

证明: 固定 $\theta\in\Omega$, 设一顾客到达时,见到系统中有 k 个顾客,此顾客在服务前总共服务了 l 批

顾客($l \le k$), 因此这 l 批顾客的总服务时间的密度函数为 $V_N(t)$ 的 l 重卷积 $V_N^{(l)*}(t)$, 又设 $Y_N^{(l)}$ 表示服务的 l 批顾客总数, $Y_{N_i}^{(l)}$ 表示第 i 批服务的顾客数($i=1,2,\cdots,l+1$), 显然若(2.2)式成立, $Y_{N_i}^{(1)}$ 独立同分布, 因此 $Y_{N_i}^{(1)}$ 的联合分布为: $P^{(\theta)}(Y_{N_1}^{(1)}=k_1,\cdots,Y_{N_{l+1}}^{(1)}=k_{l+1})=\prod_{m=1}^{l+1}P^{(\theta)}(Y_{N_m}^{(1)}=k_m)$

由引理 2.1, 有: $P^{(\theta)}(Y_{N_1}^{(1)}=K_1,\cdots,Y_{N_{l+1}}^{(1)})=k_{l+1})=\prod_{m=1}^{l+1}\left[\sum_{i_m=k_m}^{\infty}p_{i_m}(\theta)a_{k_m}^{(i)}(\theta)\right]$ (2.14)

又

$$W(0)=P^{(\theta)}(W=0)P^{(\theta)}(N=0)=p_0(\theta)$$

$$\begin{aligned}W(t)&=P^{(\theta)}(W\le t)=P^{(\theta)}(W=0)+P^{(\theta)}(0<W\le t)\\&=p_0(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}P^{(\theta)}(N=k)\sum_{l=1}^{k}P^{(\theta)}(Y_N^{(l)}\le k,Y_N^{(l+1)}>k)\int V_N^{(l)*}(x)\,dx\\&=p_0(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\le k\\k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}P^{(\theta)}(Y_{N_1}^{(1)}=k_1,\cdots,Y_{N_{l+1}}^{(1)}=k_{l+1})\int V_N^{(l)*}(x)\,dx\end{aligned}$$

注意到(2.14)式有:

$$W(t)=p_0(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\le k\\k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}\left[\prod_{m=1}^{l+1}\left(\sum_{i_m=k_m}^{\infty}p_{i_m}(\theta)a_{k_m}^{l_m}(\theta)\right)\right]\int V_N^{(l)*}(x)\,dt$$

因此其密度函数 $w(t)$ 为:

$$w(t)=\begin{cases}E(p_0(\theta)) & \text{当 } t=0\\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\le k\\k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}\left[\prod_{m=1}^{l+1}\left(\sum_{i_m=k_m}^{\infty}p_{i_m}(\theta)a_{k_m}^{l_m}(\theta)\right)\right]V_N^{(l)*}(t) & t>0\end{cases}$$

再由(2.3)式知, (2.12)、(2.13)式成立。

推论 **2.3** 设 T 为逗留时间, 若(2.2)成立, 则在统计平衡条件下 T 的密度函数为

$$\mu(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ E\{\int_{0^+}\sum_{i=1}^{\infty}p_i(\theta)\mu_i(\theta)e^{-\mu_i(\theta)(t-x)}\{\sum_{k=1}^{\infty}p_k(\theta)\sum_{l=1}^{k}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l\le k\\k_1+\cdots+k_{l+1}>k}}\end{cases}$$

$$\left[\sum_{m=1}^{l+1}\left(\sum_{i_m=k_m}^{\infty}p_{i_m}(\theta)a_{k_m}^{(l_m)}(\theta)\right]V_N^{(l)*}(x)\,dx\}+p_0(\theta)\sum_{k=1}^{\infty}p_i(\theta)\mu_i(\theta)e^{-\mu_i(\theta)t}\qquad t\ge 0$$

证明: 设等待时间为 W, 批服务时间 N_N, 则有 $T=W+V_N$ 因 W 与 V_N 相互独立, 因此若(2.2)式成立, 则 T 的密度函数是 W 与 V_N 的密度函数的卷积, 注意到(2.3)式. (2.12)式即得证。

2.4 平均等待时间, 平均逗留时间

定理 **2.4** 若(2.2)式和式 $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k p_k<\infty \quad P-a\quad e$ (2.15)

成立, 则在统计平衡条件下 $M/M^Y/1$ 排队系统中顾客的平均等待时间 $\bar{W}$ 和平均逗留时间 $\bar{T}$ 分别为

$$\bar{W}=E\left[\sum_{i=1}^{\infty}ip_i(\theta)-\sum_{i=1}^{\infty}p_i(\theta)\sum_{k=1}^{i}ka_k^{(i)}(\theta)\Big/\sum_{i=0}^{\infty}\lambda p_i(\theta)\right\}$$

$$\bar{T}=E\left[\sum_{i=1}^{\infty}ip_i(\theta)\Big/\sum_{i=0}^{\infty}\lambda p_i(\theta)\right]$$

证明: 固定 $\theta\in\Omega$, $M/M^Y/1$ 排队系统在统计平衡条件下顾客的平均等待时间和平均逗留时间分别用 $\bar{W}(\theta)$、$\bar{T}$ 表示, 又平均输入率, 平均队长, 平均等待队长分别为

$$\bar{\lambda}(\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda p_i(\theta)\qquad \bar{N}(\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i(\theta)$$

$$\bar{N}'(\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i(\theta)-\sum_{i=1}^{\infty}p_i(\theta)\sum_{k=1}^{i}ka_k^{(i)}(\theta)$$

由 little 公式和(2.3)式即得证。

(下转第 121 页)

参考文献

1 金治明 . 最优停止理论及其应用 . 长沙: 国防科技大学出版社, 1997
2 钱敏平 . 随机过程引论 . 北京大学出版社, 1990
3 zick erm an· Search model: The continuous case· J· Appl· Prob· 1983. 20: 637-648
4 w olfgang stadie· A New Continuous-time Search model· J· Appl· prob· 1991, 28: 771～778
5 复旦大学编, 概率论(第一册) . 北京: 人民教育出版社
6 王石, 李兵 . 一类折扣型投资模型的最优停止 . 国防科技大学学报, 1998, 20(1)
7 陈家鼎, 李向科 . 一类最优停止问题的解 . 应用概率统计, 1986, 1(2)

(上接第 117 页)

参考文献

1 张建康. On the Generalized Birth and Death Prolesses. 数学物理学报. 1984, 4(2) : 141～259
2 唐有荣、刘再明、侯振挺. 广生灭过程的遍历性及平稳分布 . 数学物理学报, 1998, 18(1) : 25～32
3 刘再明 . 一类随机环境中的广生灭过程 . 长沙铁道学院学报 1990; 8(2) .
4 刘再明 . 随机环境中的排队问题, 湖南数学年刊, 1995, 15 (1)