一种推广的连续情形经济投资模型*

王石 杨文强 金治明 李兵

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 随着序列情形费用型投资模型和折扣投资模型的解决, 本文对其进行连续推广, 并给出一个明确的停止规则。

关键词 最优停时 弱无穷小算子 *Dynkin* 公式

分类号 *O*224

The Applied Investment Model at the Continous case

Wang Shi Yang Wenqiang Jin Zhiming Li Bing

(Department of Automatic Control NUDT, Changsha, 410073)

Abstract With serial investment models soluted[1-2], the essay deals with their applied form-the continuous form, and gives its explicit optimal stopping rule.

Key words Optimal stopping time Weak infinitesmal operator Dynkin formula

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间, $Z_1, Z_2, \cdots, \epsilon_1, \epsilon_2, \cdots$是独立的随机变量列, 诸$Z_i$服从相同的分布, 分布函数为$G(x)$。诸$\epsilon_i$服从一个贝努里分布:

$$P(\epsilon_i = 1) = p = 1 - P(\epsilon_i = 0), 0 < p < 1$$

令

$$T_0 \equiv z\ (z\ 为常数)$$

$$T_n = \epsilon_n(T_{n-1} + Z_n)\ (n \geq 1)$$

$$X_n = \alpha^n T_n (0 < \alpha < 1)$$

$$\mathscr{F}_0 = (\Omega, \phi).\ \mathscr{F}_n = \sigma(Z_1, \epsilon_1, Z_2, \cdots, Z_n, \epsilon_n) \quad (n \geq 1)$$

$$\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n \geq 0} \mathscr{F}_n$$

设$\{N(t)\}$为参数为λt的 Possion 过程, 有

$$X_t = e^{-\alpha t} T_{N(t)} - ct$$

其中 $\alpha > 0, c > 0; N(t)$ 和$\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}, \{Z_m\}_{n=1}^{\infty}$独立。

令$\mathscr{F}_t = \sigma(T_{N(u)}, N(u), 0 \leq u \leq t), \mathscr{F} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathscr{F}_t)$, 我们来求$(X_t, \mathscr{F}_t, t \geq 0)$的最优停止问题。

此问题的序列情形的费用型和折扣型分别为$X_n = T_n - nc$和$X_n = \alpha^n T_n (0 < \alpha < 1)$, 分别为文[6-7]所解决。现在的$X_t$是把$X_n$得到的, 因而$T_{N(t)}$可解释为到时间$t$为止投资者所得到的“资金”。$e^{-\alpha t}$, ct分别表示折扣和费用。求$(X_t, \mathscr{F}_t, t > 0)$的最优停止问题, 相当于投资者选取适当的策略, 使其所得的报酬在概率平均意义下最大。

1 X_t 性质的研究

引理 1 $(T_n, \mathscr{F}_n, n \geq 0)$是一维空间$(R, B)$中的齐次马氏链, 其转移函数是:

* 国家自然科学基金项目资助
1998 年 11 月 2 日修订
第一作者: 王石, 男, 1973 年生, 博士生

$$P(x,B) = p\int_{-\infty}^{\infty} I_B(x+u)\,\mathrm{d}G(x) + (1-p)I_B(0) \tag{3.1}$$

证明: 设f 为 Borel 函数, 由$\sigma(\epsilon_{n+1}, Z_{n+1})$和$\mathscr{F}_n$独立(用EX 表示随机变量的数学期望, 下同),

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[f(T_{n+1}) \mid \mathscr{F}]\\
&= \mathrm{E}[f(\epsilon_{n+1}(T_n + Z_{n+1})) \mid \mathscr{F}_n]\\
&= \mathrm{E}[f(\epsilon_{n+1}(x + Z_{n+1}))] \mid_{x=T_n}\\
&= \mathrm{E}[I_{(\epsilon_{n+1}=1)}f(x + Z_{n+1})] \mid_{x=T_n} + E[I_{(\epsilon_{n+1}=0)}f(0)]\\
&= p\int_{-\infty}^{\infty} f(T_n + u)\,\mathrm{d}G(x) + (1-p)f(0)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[f(T_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\ \sigma(T_n)]\\
&= \mathrm{E}[f(T_{n+1}) \mid T_n)]\\
&= p\int_{-\infty}^{\infty} f(T_{n+1})\,\mathrm{d}G(x) + (1-p)f(0)
\end{aligned}$$

引理 **2** $(T_{N(t)}, \mathscr{F}_t, t \geq 0)$为右连续的马氏过程, 从而$(X_t, \mathscr{F}_t, t \geq 0)$亦然。

证明: $\forall\ \delta > 0$

$$\begin{aligned}
&P(|T_{N(t+\epsilon)} - T_{N(t)}| > \delta)\\
&\leq P(|N(t+\epsilon) - N(t)| \geq 1)\\
&= \lambda\epsilon + o(\epsilon) \to 0(\epsilon \to 0)
\end{aligned}$$

于是右连续得证。任取 Borel 可测函数f, $\forall s > t > t_n > t_{n-1} >, \cdots, > t_1 \cdot n \in N$. 令

$$B = [(N(t), T_{N(t)}) = (i, x)]$$

$$B_k = (N(t_k, T_{N(T_k)}) = (i_k, x_k)\quad k = 1, \cdots, n$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}f(T_{N(s)}) \mid (N(t), T_{N(t)}) = (i,x)(N(t_n), T_{N(t_n)}) = (i, x_n), \cdots, (N(t_1), T_{N(t_1)}) = (i_1, x_1)\\
&= \mathrm{E}[f(T_{N(s)-N(t)+i}) \mid B, B_k, 1 \leq k \leq n]\\
&= \mathrm{E}[f(T_{N(s)-N(t)+i} \mid T_i = x, T_{i_n} = x_n, \cdots, T_{i_1} = x_1]\\
&= \mathrm{E}[f(T_{N(s)-N(t)+i}) \mid T_i = x]\\
&= \mathrm{E}[f(T_{N(s)}) \mid (N(t), T_{N(t)}) = (i,x)]
\end{aligned}$$

最后一步要用到$N(t)$的独立增量性及T_n为马氏链(引理 1) 以及$N(t)$和T_n独立。因而马氏性得证。

引理 **3** $E\sup_t e^{-\alpha}T_{N(t)} < \infty$.

说明: 这个条件是 Dynkin 公式成立的条件。下面求最优停时要用到Dynkin 公式, 因此这个条件必须验证。

令$S_n = inf\{t: N(t) = n\}$, 则S_n服从$\Gamma(\lambda, n)$分布(见[5])。

证明: 显然, 只需证明

$$\mathrm{E}\sup_t e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i < +\infty$$

不妨设$P(T_0 = 0) = 1$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\sup_t e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\\
&= \int_0^{\infty} P(\sup_t e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} P(\exists\ t > 0, \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i > xe^{\alpha})\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{n} Z_i > xe^{\alpha S_n})\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} nP(Z_1 > \frac{xe^{\alpha S_n}}{n})\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} nP(Z_1 > \frac{xe^{\alpha}}{n})\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} nE(ne^{-\alpha} Z_1) \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n EZ_1 < \infty$$

从而引理得证。

2 问题的解法

令 $X_t = g(t, N(t,), T_{N(t)})$。

定义 $A_g(t,i,x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^{-1}\{E(X_{t+\epsilon}\ (N(t), T_{N(t)})) = (i,x)) - e^{-\alpha}x - ct\}$

上面的算子 A 一般称为弱无穷小算子, 所以称其为弱无穷小算子, 是因为其为点点收敛(即在 (t,i,x) 处收敛) 。与弱无穷小算子对应的是无穷小算子。(详细可参看文[2])

$$A_0 = \{N(t+\epsilon) - N(t) = 0\}$$

$$A_1 = \{N(t+\epsilon) - N(t) = 1\}$$

$$C = \{(N(t), T_{N(t)}) = (i,.x)\}$$

则

$$\mathrm{E}(X_{t+\epsilon}\ (N(t), T_{N(t)}) = (i,x))$$

$$\mathrm{E}(X_{t+\epsilon}, A_0\ C) + E(X_{t+\epsilon}, A_1\ C) + o(\epsilon) \tag{5.1}$$

利用引理 1 可知

$$A_g(t,i,x) = e^{-\alpha}\lambda(pEZ_1 - (1-p)x) - c$$

由于 X_t 满足引理 1, 我们可应用 Dynkin 公式见[4] pp 774～776) . 即 $\forall \tau$ 为有限停时,

$$\mathrm{E}X_\tau = X_0 + \mathrm{E}\int_0^\tau A_y X_t \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{E}\int_0^\tau \{[e^{-\alpha}\lambda(p\mathrm{E}Z_1 - (1-p)T_{N(t)})] - c\}\mathrm{d}t$$

上式积分号里的函数关于 x 递减, 关于 t 递减, 当 $pEZ_1 - (1-p)x \geq 0$ 时。

显然, 最优停时规则为:

$\sigma = (\inf\{t: e^{-\alpha}\lambda(pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)}) - c \leq 0$ 且 $pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)} > 0$ 或 $pEZ_1 - (1-P)T_{N(t)} \leq 0\}$

如果把 $c(t)$ 换成 $\int_0^t c(s)\mathrm{d}t$, 并且 $c(t)$ 关于 t 递增, 则只需将上式中的 c 换成 $c(t)$ 即可。

说明: 上式的停止规则是明确的, 可以用图示法表示。

上面还须证明 σ 为有限停时, 即 $P(\sigma < \infty) = 1$。

$$\sigma_1 = \inf\{t: pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)} \leq 0\}$$

$$\sigma_2 = \inf\{t: e^{-\alpha}\lambda(pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)}) - c \leq 0 \text{ 且 } pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)} > 0\}$$

$$\forall \omega \in [\sigma_1 = \infty]$$

$$-c \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} e^{-\alpha}\lambda(pEZ_1 - (1-p)T_{N(t)}) - c$$

$$\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} e^{-\alpha}\lambda pEZ_1 - c$$

$$= -c < 0$$

因而

$$\sigma_2(\omega) < \infty, \omega \in [\sigma_1 = +\infty]$$

又(利用 $\inf(A \cup B) = \inf A \wedge \inf B$)

$$\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

可知

$$P(\sigma < \infty) = 1$$

参考文献

1 金治明 . 最优停止理论及其应用 . 长沙: 国防科技大学出版社, 1997
2 钱敏平 . 随机过程引论 . 北京大学出版社, 1990
3 zickerman. Search model: The continuous case. J. Appl. Prob. 1983. 20: 637-648
4 wolfgang stadie. A New Continuous-time Search model. J. Appl. prob. 1991, 28: 771～778
5 复旦大学编, 概率论(第一册) . 北京: 人民教育出版社
6 王石, 李兵 . 一类折扣型投资模型的最优停止 . 国防科技大学学报, 1998, 20(1)
7 陈家鼎, 李向科 . 一类最优停止问题的解 . 应用概率统计, 1986, 1(2)

(上接第 117 页)

参考文献

1 张建康. On the Generalized Birth and Death Prolesses. 数学物理学报 . 1984, 4(2) : 141～259
2 唐有荣、刘再明、侯振挺 . 广生灭过程的遍历性及平稳分布 . 数学物理学报, 1998, 18(1) : 25～32
3 刘再明 . 一类随机环境中的广生灭过程 . 长沙铁道学院学报 1990; 8(2) .
4 刘再明 . 随机环境中的排队问题, 湖南数学年刊, 1995, 15 (1)