国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第1期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 1 1999

关于线性时变系统的逆*

张新建　黄建华

(国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073)

摘　要　本文讨论单输入单输出线性时变系统的逆系统问题, 给出了可逆性的充要条件和两种降阶逆系统的计算方法, 并用例子说明了这些方法。

关键词　线性时变系统, 可逆性准则, 降阶逆系统

分类号　O231

On the Inversion of Linear Time-Variable Systems

Zhang Xinjian　Huang Jianhua

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　This paper discusses the invertibility of Single-input single-output linear timevarying systems. A necessary and sufficient condition for invertibility is derived. A new algorithm for constructing the reduced inverse systems is presented. This algorithm is considerably more efficient and simpler than prerious methods. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words　linear time-variable system, criterion of invertibility, reduced inverse system

设有单输入单输出线性时变系统

$$x(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \tag{1a}$$

$$y(t) = c(t)x(t) \tag{1b}$$

其中 $x(t)$ 为 n 维列向量, $A(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 在区间$[t_0, +\infty)$上 n 阶可导。

关于线性系统的逆系统的概念可见文[1], 文[1]讨论了当(1)是时不变系统时, 可逆性的判断准则及降阶逆系统的求解方法。对于时变系统, 一个明显的困难是系统的可逆性及逆系统的阶数都可能随时间而变化。为了克服这一困难, 我们将对系统附加一定条件。

设 $S_0(t) = c(t)$, $S_{i+1}(t) = S_i(t)A(t) + \dot{S}_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$。称区间 J 为系统(1)的正则区间, 若对每个 $0 \le i \le n$, $S_i(t)b(t)$ 在 J 上要么恒为零, 要么恒不为零。以下总假定$[t_0, +\infty)$为系统(1)的正则区间。

如果存在 $1 \le \alpha \le n$, 使得在$[t_0, +\infty)$上 $S_i(t)b(t) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, \alpha - 2)$ 而 $S_{\alpha-1}(t)b(t) \ne 0$, 记 $S_{\alpha-1}(t)b(t) = q^{-1}(t)$, 则由(1)得 $y^{(i)}(t) = S_i(t)x(t)$ $(0 \le i \le \alpha - 1)$, 且

$$y^{(\alpha)}(t) = S_\alpha(t)x(t) + q^{-1}(t)u(t) \tag{2}$$

由(2)解出 u 并代入(1a), 有

$$x = [A(t) - q(t)b(t)S_\alpha(t)]x(t) + q(t)b(t)y^{(\alpha)}(t) \tag{3a}$$

$$u(t) = -q(t)S_\alpha(t)x(t) + q(t)y^{(\alpha)}(t) \tag{3b}$$

系统(3)便是系统(1)的逆系统。

1　可逆性的充要条件

引理 1　设 $T(t)$ 为$[t_0, +\infty)$上可导的非奇异矩阵, 系统(1)在变换 $\bar{x} = Tx$ 下变为等价系统$(\bar{A}, \bar{b},$

* 1998年5月25日收稿
第一作者: 张新建, 男, 1956年生, 副教授

$\bar{c}, 0)$, 记

$$\bar{S}_0(t) = \bar{c}(t), \bar{S}_{i+1}(t) = \bar{S}_i(t)\bar{A}(t) + \dot{\bar{S}}_i(t), i = 0, 1, 2, \cdots \tag{4}$$

则 $\bar{S}_i(t) = S_i(t)T^{-1}(t), \bar{S}_i(t)\bar{b}(t) = S_i(t)b(t)$.

引理 2[2] 设 $\alpha(0 < \alpha \le n)$ 是使 $S_{\alpha-1}(t)b(t) \ne 0(t \ge t_0)$ 的第一个正整数, 则在 $[t_0, +\infty)$ 上矩阵 $Q'_\alpha(t) = (S'_0(t), \cdots, S'_{\alpha-1}(t))$ 的秩恒为 α, 其中上标"$'$"表示转置。

定理 1 设对某个 $k(1 \le k \le n)$, 矩阵 $Q'_k(t)$ 在区间 J 上的秩为常数 $r(1 \le r \le k)$, 则在 J 的某子区间 Δ 内 $Q'_r(t)$ 的秩恒为 r.

证明 设 $X(t)$ 是 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ 的基本解矩阵, 以系统(1)作变换 $\bar{x}(t) = X^{-1}(t)x(t)$, 由引理 1, 对变换后的系统有

$$\bar{S}_0(t) = c(t)X(t), \bar{S}_{i+1}(t) = \dot{\bar{S}}_i(t), i = 0, 1, 2\cdots \tag{5}$$

且两组向量 $\bar{S}_i(t)$、$S_i(t)$ 组成的相应矩阵 $\bar{Q}'_k(t)$ 与 $Q'_k(t)$ 具有相同的秩, 故只需证明 $\bar{Q}'_r(t) = (\bar{S}'_0(t), \cdots, \bar{S}'_{r-1}(t))$ 在某子区间 Δ 内的秩为 r.

若 $r = k$, 则结论显然成立。以下设 $r < k$.

任取 $t_1 \in J$, 因秩 $Q'_k(t_1) = r$, 由连续性知 $Q'_k(t)$ 中必有某固定的 r 行, 由这 r 行构成的某 r 阶子式在 t_1 的某领域 J_1 内恒不为零, $Q'_k(t)$ 的任意 $r+1$ 阶子式在 J_1 内恒为零。设这 r 行为 $E_0 = \{\bar{S}_{i_1}(t), \bar{S}_{i_2}(t), \cdots, \bar{S}_{i_r}(t)\}(0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le k-1)$。

若 $\bar{S}_0(t) \bar{\in} E_0$, 则有 r 个在 J_1 内可导的函数 $\lambda^0_j(t)(j = 1, 2, \cdots, r)$, 使得

$$\bar{S}_0(t) = \lambda^0_1(t)\bar{S}_{i_1}(t) + \lambda^0_2(t)\bar{S}_{i_2}(t) + \cdots + \lambda^0_r(t)\bar{S}_{i_r}(t), t \in J_1 \tag{6}$$

且 $\lambda^0_j(t)(1 \le j \le r)$ 在 J_1 上不能全部恒等于零, 否则, $\bar{S}_0(t) = 0(t \in J_1)$, 由(5)知 $\bar{S}_1(t) = \dot{\bar{S}}_0(t) = 0$ $(t \in J_1)$, 依此递推知在 J_1 内 $\bar{S}_i(t) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots)$。这与定理所给条件矛盾。设 $t_2 \in J_1$, 使 $\lambda^0_j(t_2)$ 不全为零, 记 $j_0 = \max\{1 \le j \le r \ \lambda^0_j(t_2) \ne 0\}$。由连续性, 存在 t_2 的一个邻域 $J_2 \subset J_1$, 使 $\lambda^0_{j_0}(t) \ne 0$ $(t \in J_2)$。于是, 由(6)式知在 J_2 内 $\bar{S}_{i_{j_0}}(t)$ 可由 $E_0 \backslash \{\bar{S}_{i_{j_0}}(t)\}$ 表出。取 $E_1 = [E_0 \backslash \{\bar{S}_{i_{j_0}}(t)\}] \cup \{\bar{S}_0(t)\}$, 则可知 E_1 在 J_2 内与 E_0 在 J_1 内具有同样的性质。

若 $\bar{S}_0(t) \in E_0$, 则直接记 $E_1 = E_0, J_2 = J_1$。

一般地, 设已得到 $E_l = \{\bar{S}_0, \bar{S}_1, \cdots, \bar{S}_{l-1}, \bar{S}_{m_1}, \cdots, \bar{S}_{m_{r-l}}\}$ 和 J_{l+1}, 且 $l < r$。若 $\bar{S}_l(t) \bar{\in} E_l$, 则存在 r 个在 J_{l+1} 内可导的函数 $\mu^l_0(t), \cdots, \mu^l_{l-1}(t), \lambda^l_1(t), \cdots, \lambda^l_{r-l}(t)$, 使

$$\bar{S}_l(t) = \sum_{i=0}^{l-1}\mu^l_i(t)\bar{S}_i(t) + \sum_{j=1}^{r-l}\lambda^l_j(t)\bar{S}_{m_j}(t), t \in J_{l+1} \subset J$$

若 $\lambda^l_j(t)(1 \le j \le r-l)$ 在 J_{l+1} 上恒为 0, 则 $\bar{S}_l(t) = \sum_{i=0}^{l-1}\mu^l_i(t)\bar{S}_i(t)(t \in J_{l+1})$, 由(5)式知, 在 J_{l+1} 内, $\bar{S}_i(t)(i \ge l)$ 均可由 $\bar{S}_0(t), \bar{S}_1(t), \cdots, \bar{S}_{i-1}(t)$ 表出, 此与 $l < r$ 相矛盾。若 $\lambda^l_j(t)$ 至少有一个在 J_{l+1} 内不恒为零, 则必存在 $t_{l+2} \in J_{l+1}$, 可取到 $j_l = \max\{1 \le j \le r \ \lambda^l_j(t_{l+2}) \ne 0\}$。类似于前面的过程得到 $E_{l+1} = [E_l \backslash \{\bar{S}_{m_{j_l}}(t)\}]U\{\bar{S}_l(t)\}$ 和区间 $J_{l+2} \subset J_{l+1}$。

如此下去, 最多经 r 步后, 必得到区间 $\Delta \subset J$, 使矩阵 $Q'_r(t)$ 在 Δ 上秩为常数 r。 (证毕)

利用定理 1 的结果, 可以证明下面的重要定理。

定理 2 系统(1)可逆的充要条件是: 存在正整数 $\alpha(0 < \alpha \le n)$, 使得 $s_{\alpha-1}(t)b(t) \ne 0(t \ge t_0)$。

证明 充分性已由本文开头的讨论而知, 且逆系统就是(3)。以下证必要性, 只要证明: 若对任意 $0 \le i \le n$, $S_i(t)b(t) = 0$ $(t \ge t_0)$, 则系统(1)不可逆。

假设 $S_i(t)b(t) = 0$ $(0 \le i \le n, t \ge t_0)$, 则 $Q'_n(t)b(t) = 0(t \ge t_0)$。若存在一个区间 $J \subset [t_0, +\infty)$, 使 $b(t) = 0(t \in J)$, 则显然在 J 上系统(1)的输出 $y(t)$ 与输入 $u(t)$ 无关, 因而不可逆。

若存在 $t_1 \in [t_0, +\infty)$, 使 $b(t_1) \ne 0$, 由 $Q'_n(t_1)b(t_1) = 0$ 知 $Q'_n(t_1)$ 的秩小于 n, 设秩 $Q'_n(t_1) = r_1$. 由连续性知存在 t_1 的邻域 J_1, 使得秩 $Q'_n(t) \ge r_1(t \in J_1)$。若秩 $Q'_n(t) = r_1(t \in J_1)$, 则记 $\Delta = J_1$, 否则必存在 $t_2 \in$

J_1, 使得秩 $Q_n'(t_2)=r_2>r_1$。同样, 由连续性知存在 t_2 的邻域 $J_2\subset J_1$, 使得秩 $Q_n'(t)\geq r_2(t\in J_2)$。若秩 $Q_n'(t)=r_2(t\in J_2)$, 则记 $\Delta=J_2$, 否则重复上述步骤。由此可知, 必可得到一个区间 Δ 和常数 r, 使得秩 $Q_n'(t)=r(t\in\Delta)$, 从而由定理 1 可设秩 $Q_r'(t)=r\ (t\in\Delta)$。

因为在 Δ 内 $Q_r'(t)$ 为 $r\times n$ 阶行满秩矩阵, 则存在 $n\times(n-r)$ 列满秩矩阵 $T_2(t)$, 使得 $Q_r'(t)T_2(t)=0\ (t\in\Delta)$。又因为 $T_2(t)$ 为 $n\times(n-r)$ 列满秩矩阵, 则存在 $(n-r)\times n$ 行满秩矩阵 $K(t)$, 使得 $K(t)T_2(t)=I_{n-r}(t\in\Delta)$, 且存在 $n\times r$ 列满秩矩阵 $T_1(t)$, 使 $K(t)T_1(t)=0(t\in\Delta)$。这里 I_k 指 k 阶单位矩阵。由于 $Q_r'(t)T_1(t)$ 的秩为 r, 则存在可逆矩阵 $P(t)$ 和 $R(t)$, 使 $P(t)Q_r'(t)T_1(t)R(t)=I_r(t\in\Delta)$。记

$$T(t)=(T_1(t)R(t)\mid T_2(t)),\quad F(t)=\begin{pmatrix}P(t)Q_r'(t)\\ \hline K(t)\end{pmatrix}$$

则 $F(t)T(t)=I_n(t\in\Delta)$, 即 $F(t)=T^{-1}(t)(t\in\Delta)$。

在区间 Δ 上, 对系统(1)作等价变换 $\bar{x}(t)=T^{-1}(t)x(t)$, 得

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}(t)\bar{x}(t)+\bar{b}(t)u(t) \tag{7a}$$

$$y(t)=\bar{c}(t)\bar{x}(t) \tag{7b}$$

其中

$$\bar{A}=T^{-1}AT+\dot{T}^{-1}T\equiv\begin{pmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\bar{b}=T^{-1}b=(0\mid(Kb)')',\quad \bar{c}=cT=(cT_1R\mid 0)$$

因为 $Q_r'A+\dot{Q}_r'=(S_1',S_2',\cdots,S_r')'$, $S_iT_2=0(t\in\Delta,0\leq i\leq r-1)$, 而在 Δ 内 S_r 可由 $S_0,\cdots,S_{r-1}$ 线性表出, 故 $S_rT_2=0$, 于是

$$\bar{A}_{12}=P(Q_r'A+\dot{Q}_r')T_2=0$$

若记 $\bar{x}=(\bar{X}_1',\bar{X}_2')'$, $\bar{X}_1$ 为 r 维列向量, 则由(7)有

$$\dot{\bar{X}}_1=\bar{A}_{11}\bar{X}_1,\ y=\bar{c}_1\bar{X}_1$$

即在区间 Δ 内输出 $y(t)$ 与输入 $u(t)$ 无关, 因而系统(1)是不可逆的。 (证毕)

2 降阶逆系统

当系统(1)满足定理 2 中的可逆性条件时, 由引理 2 知秩 $Q_\alpha'(t)=\alpha$, 按文[2]的方法任取 $n\times(n-\alpha)$ 阶连续可微矩阵 $U_1(t)$, 使 $U'(t)=(Q_\alpha(t)\mid U_1(t))$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上非奇异, 作变换 $\bar{x}(t)=U(t)x(t)$, 得(1)的等价系统$(\bar{A},\bar{b},\bar{c},0)$, $\bar{A}$ 仍按(8)分块, 只是 $\bar{A}_{11}$ 为 α 阶方阵, 则有$(\bar{A}_{11},\bar{A}_{12})=(S_1'(t),\cdots,S_\alpha'(t))'U^{-1}(t)$。记 $\bar{S}_\alpha(t)=S_\alpha(t)U^{-1}(t)=(a_0(t),\cdots,a_{n-1}(t))$, 则

$$\bar{A}_{11}(t)=\left(\begin{array}{c|ccc}0 & & I_{\alpha-1} & \\ \hline a_0(t) & a_1(t), & \cdots, & a_{\alpha-1}(t)\end{array}\right),\ \bar{A}_{12}=\left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline a_\alpha(t), & \cdots, & a_{n-1}(t)\end{array}\right)$$

$$\bar{b}(t)=Ub=(0,\ \cdots,\ 0,\ q^{-1}(t)\mid b'U_1)',\ \bar{c}=cU^{-1}=(1,0,\cdots,0)$$

代入(3), 得(1)的 $n-\alpha$ 阶逆系统

$$\dot{z}(t)=\tilde{A}(t)z(t)+\tilde{B}(t)\bar{Y}(t) \tag{9a}$$

$$u(t)=\tilde{c}(t)z(t)+\tilde{d}(t)\bar{Y}(t) \tag{9b}$$

其中

$$\tilde{A}=\bar{A}_{22}-q(t)U_1'b\alpha_2,\ \tilde{B}=(\bar{A}_{21}-q(t)U_1'b\alpha_1\mid q(t)U_1'b)$$

$$\tilde{c}=-q(t)\alpha_2,\ \tilde{d}=-q(t)(\alpha_1\mid -1)$$

$$\alpha_1(t)=(a_0(t),\cdots,a_{\alpha-1}(t)),\ \alpha_2(t)=(a_2(t),\cdots,a_{n-1}(t))$$

$$\bar{Y}(t)=(y(t),y^{(1)}(t),\cdots,y^{(\alpha)}(t))'$$

定理 3 设系统(1)满足定理 2 的可逆性条件, 在区间 J 上满足秩 $Q_n'(t)=$ 秩 $Q_{n_1}'(t)=n_1$(常数), 则系统(1)在 J 上存在 $n_1-\alpha$ 阶逆系统:

$$z(t) = \tilde{\tilde{A}}(t)z(t) + \tilde{\tilde{B}}(t)\bar{Y}(t) \tag{10a}$$
$$u(t) = \tilde{\tilde{c}}(t)z(t) + \tilde{\tilde{d}}(t)\bar{Y}(t) \tag{10b}$$

其中

$$\tilde{\tilde{A}} = H_2 - qMb(1,0,\cdots,0),\ \tilde{\tilde{B}} = (H_1,\ \vert\ qMb)$$
$$\tilde{\tilde{c}} = (-q,0,\cdots,0)(n_1-\alpha\text{ 维}),\ \tilde{\tilde{d}} = (0,\cdots,0,q)(\alpha+1\text{ 维})$$
$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline a_0(t), & \cdots, & a_{\alpha-1}(t)\end{pmatrix}_{(n_1-\alpha)\times\alpha},\ H_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & I_{n_1-\alpha-1} & \\ \hline a_\alpha(t) & a_{\alpha+1}(t), & \cdots, & a_{n_1-1}(t)\end{array}\right)$$
$$M(t) = (S'_\alpha(t),\cdots,S'_{n_1-1}(t))$$

证明　在定理 3 的条件下, 逆系统(10)的推导类似于时不变系统的情形[1], 这里从略。

系统(10)中的 $a_0(t),\cdots,a_{n_1-1}(t)$ 是 J 上的可微函数, 由下述方程确定

$$S_{n_1}(t) = a_0(t)S_0(t) + a_1(t)S_1(t) + \cdots + a_{n_1-1}(t)S_{n_1-1}(t)$$

3　举例

例　在系统(1)中取

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -t^2\end{pmatrix},\ b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\ c(t) = (0,t,t^2)$$

求其逆系统。

此例 $n=3$, 由(4)式求得 $S_0(t) = (0,t,t^2)$, $S_1(t) = (0,1+t^2,2t-t^4)$, $S_2(t) = (0,3t+t^3,2-6t^3+t^6)$。对于取定的 $t_0>0$, $[t_0,+\infty)$ 为该系统的正则区间, 且 $q^{-1}(t) = S_0(t)b(t) = t\neq 0$, 故 $\alpha=1$。

先按(9)求 $n-\alpha=2$ 阶逆系统。取

$$U_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ U(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ U_1'\end{pmatrix}$$

则

$$(a_0(t),a_1(t),a_2(t)) = S_1(t)U^{-1}(t) = \left(\frac{2}{t}-t^2,0,t^3+t^2-1\right)$$
$$(\bar{A}_{21}\ \vert\ \bar{A}_{22}) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t\end{array}\right)$$
$$U_1'b = \begin{pmatrix} 0, t^4+t^3-t \\ 0, t^3+t^2-1\end{pmatrix}$$

代入(9), 得系统的 2 阶逆系统:

$$z(t) = \begin{pmatrix} t, 2-t^2-t^3 \\ 0, \frac{1}{t}-t^2\end{pmatrix}z(t) + \begin{pmatrix} t^2-\frac{2}{t}, 1 \\ t-\frac{2}{t^2}, \frac{1}{t}\end{pmatrix}Y(t)$$
$$u(t) = \left(0,\frac{1}{t}-t-t^2\right)z(t) + \left(t-\frac{2}{t^2},\frac{1}{t}\right)Y(t)$$

下面再按定理 3 来寻求更低阶的逆系统。记 $t^3+t^2-1=0$ 的唯一正实根为 $t_1(\approx 0.755)$。当 $0<t_0<t_1$ 时, 易知 $Q_2'(t)$ 在 $[t_0,t_1)$、$(t_1,+\infty)$ 内的秩恒为常数 $n_1=2$, 而 $Q_3'(t)$ 的秩为零。由定理 3, 在 $[t_0,t_1)$ 和 $(t_1,+\infty)$ 内求得 $n_1-\alpha=1$ 阶逆系统

$$z(t) = \left(a_1(t)-\frac{1+t^2}{t}\right)z(t) + \left(a_0(t),\frac{1+t^2}{t}\right)Y(t)$$
$$u(t) = -\frac{1}{t}z(t) + \left(0,\frac{1}{t}\right)Y(t)$$

其中

$$a_0(t) = \frac{-2 - t + 4t^2 + 6t^3 + 3t^4 + 4t^5 - t^7 - t^8}{t^2(1 - t^2 - t^3)}$$

$$a_1(t) = \frac{2 - 3t^2 - 6t^3 - t^4 + t^6}{t(1 - t^2 - t^3)}$$

4 结束语

本文的主要结果是证明了线性时变系统可逆性的充要条件; 将线性时不变系统的求 $n_1 - \alpha$阶逆系统的方法[1]推广到线性时变系统。

定理 1 与定理 2 构成对可逆性充要条件的证明。在本文开头的假设条件下, 使得本文所讨论的线性时变系统的可逆性是区间上的整体性质。在可逆性必要条件的证明中, 就是证明了若条件不满足, 则系统是局部不可逆的, 从而是不可逆的。这种处理方法可尝试用于非线性系统可逆性的讨论[3]。局部可逆性和局部相关阶(α)的有关问题仍有待于进一步讨论。

逆系统理论与方法不仅是研究系统解耦、模型匹配及非线性系统反馈线性化[4]等问题的重要手段, 而且在样条函数方法与最优控制理论相结合的研究中也起着重要的作用[5]。

参考文献

1 张新建. 关于一维线性系统的逆, 国防科技大学学报, 1998, 20(2): 109～113

2 Silverman L M, Properties and Application of Inverse Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol.AC－13, 1968: 436～437

3 Hirschorn R M. Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, vol, AC-24, 1979: 855～865

4 李春文, 冯元琨. 多变量非线性控制的逆系统方法, 清华大学出版社, 1991

5 Zhang Xinjian (张新建). LM-g Smoothing Splines and Optimal Controls, Proceedings of the International Conference on "Systems, Control, Information" Methodologies & Applications, Vol. I, 1994: 521～525