国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第2期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol. 21 No. 2 1999

# 弹道导弹基本诸元的快速装订算法研究*

王海丽　陈　磊　胡小平

(国防科技大学自动控制系　长沙　410073)

摘　要　应用牛顿迭代法实现了弹道导弹基本诸元的快速装订。推导了根据落点偏差求飞行程序角和发射方位角的牛顿迭代公式, 设计了迭代算法, 并给出了实际算例。考虑到迭代算法收敛速度与所给的迭代初值有一定的关系, 提出了预先准备简易射表采用反插值算法为牛顿迭代法准备初值的方法, 经计算表明可以大大减少迭代次数, 从而实现标准弹道的快速设计。

关键词　牛顿迭代法, 弹道设计, 弹道导弹, 发射诸元

分类号　TJ760

# The Research of Efficient Method for Computing Basic Firing Data of Ballistic Missiles

Wang Haili　Chen Lei　Hu Xiaoping

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract**　This paper applies Newton iterative method to computing basic firing data of ballistic missiles efficiently. In this paper, Newton iterative formula based on deviations of dropping point is deduced and the iterative program is designed, an example is given. Considering the relationship between the convergent speed of the iterative method and the initial value of parameters, the paper brings forward a method, which provides good initial values of parameters by using a reverse interpolation method based on prepared firing tables. The actual practice indicates that the method accelerates iteration rapidly. It is possible to design a standard trajectory of ballistic missiles quickly by using the method presented in this paper.

**Key words**　Newton iterative method, trajectory design, ballistic missiles, firing data

在弹道导弹的发射准备中, 用来调整导弹控制系统和瞄准系统的参数统称为诸元, 它们的主要作用是在已知发射点和目标点的地理参数的情况下, 保证弹头准确地飞向目标点。在诸元的求取过程中, 需要考虑许多因素, 诸元求取是一个两点边值问题。对这一问题, 目前主要有两种求取方法: 积分计算和射表拟合。本文将着重介绍一种建立在积分计算基础上的牛顿迭代方法。由于这种方法具有快速性和简洁性, 它在进行弹道导弹先期技术演示验证的弹道仿真中具有广泛的用途。

## 1　弹道导弹基本诸元装订

为弹道导弹设计一条通过发射点和目标点的标准弹道, 主要是解决飞行程序角和发射方位角$A_0$的选择问题, 这也就是基本诸元的装订问题。若不考虑地球的旋转问题较简单, 只要根据落点纵程偏差选择飞行程序角即可。而地球的旋转使得这两组参数的选择要困难一些, 因为此时飞行程序角的变化对落点的横程偏差和纵程偏差均存在影响, 同样发射方位角$A_0$的变化对落点的横程偏差和纵程偏差也均存在影响。这时需要根据横程偏差和纵程偏差对飞行程序角和发射方位角$A_0$同时进行改变。

以地心为球心, 地球平均半径为半径做圆球, 以此圆球为参考球。导弹从发射点$L$向目标点$O$射击, 设实际落点为$C$, 如图1所示导弹落地时刻的弹道示意图。$N$为北极, 做过点$L$、$Q$的大圆弧, 过$C$做垂直于$LO$的大圆弧$CE$, 则$EO$称为纵程偏差, 记为$\Delta L$, $CE$称为横程偏差, 记为$\Delta H$, 称球面角$NLO$为初始方位角, 球面角$NLC$为实际方位角。需要说明的是, 因为地球在自旋, 故球面角$HLC$并非发射方位角, 大圆弧$LC$、$LO$对应的平面也不是实际的射击平面和预期的射击平面, 但这并不影响我们对实际落

*　1998年6月21日收稿
第一作者: 王海丽, 女, 1973年生, 博士生

点 $C$ 和目标点 $O$ 相对位置关系的精确定义。显然若不存在落点偏差则实际落点 $C$ 和目标点 $O$ 将会重合。从发射点 $L$ 看过去,实际落点 $C$ 在目标点 $O$ 的左侧时,定义 $\Delta H$ 的符号为负;$E$ 点在目标点 $O$ 的前面时,定义 $\Delta L$ 的符号为正。落点偏差 $\Delta L$、$\Delta H$ 可以由 $L$、$O$、$C$ 三点的经纬度求出。

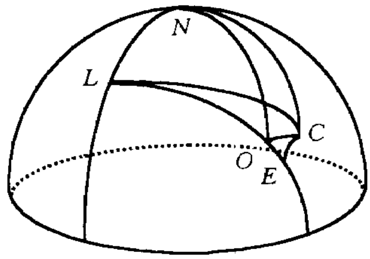


图 1 导弹弹道示意图

Fig. 1 Sketch of missile trajectory

弹道导弹的飞行程序角可以采用近似公式表示, 从而使选择飞行程序角的问题变成近似公式的参数选择问题。本文选取俯仰飞行程序角 $\varphi_{pr}$ 为如下的近似公式:

$$\varphi_{pr}(t)=\begin{cases}90^\circ & 0\le t\le t_1\\ \alpha(t)+\theta(t)+\omega_z t & t_1<t\le t_2\\ \theta(t)+\omega_z t & t_2<t\le t_3\\ \varphi_{pr}(t_3) & t_3<t\le t_k\end{cases}$$

其中, $\alpha(t)=-4\alpha_m Z(1-Z)$;$Z=e^{-a(t-t_1)}$;$\alpha_m$ 为亚音速段上攻角绝对值的最大值;$a$ 为调节参数,可取为某一常值;$\theta$ 为速度倾角;$t_1$、$t_2$ 分别为攻角转弯起始及结束时间;$t_3$、$t_k$ 分别为瞄准段的开始和结束时间。

对于某个导弹而言,$t_1$、$t_2$、$t_3$、$a$ 均可以取为常值。对于耗尽关机的导弹,$t_k$ 固定,不同的 $\alpha_m$ 将对应不同的射程;对于等时关机的导弹,一般选定一组 $\alpha_m$,对每个固定的 $\alpha_m$,不同的 $t_k$ 将对应不同的射程。故选择飞行程序角的问题可以转化为选择 $\alpha_m$ 或者 $t_k$ 的问题, 即单个参数的选择问题。下面只针对耗尽关机型导弹进行讨论。

## 2 牛顿迭代法的设计

由上所述知, 耗尽关机型导弹的标准弹道设计就是最大攻角 $\alpha_m$ 和发射方位角 $A_0$ 的选择问题。经数字仿真有如下的结论:

(1) 最大攻角 $\alpha_m$ 的变化对 $\Delta L$ 的影响是显著的,对于 $\Delta H$ 的影响也存在;

(2) 发射方位角 $A_0$ 的变化对 $\Delta H$ 的影响是显著的,对于 $\Delta L$ 的影响也存在。

可以认为有函数关系: $\Delta L=\Delta L(\alpha_m,A_0)$、$\Delta H=\Delta H(\alpha_m,A_0)$。将 $\Delta L$、$\Delta H$ 在 $\alpha_m^0$, $A_0^0$ 处做线性展开:

$$\begin{bmatrix}\Delta L(\alpha_m,A_0)\\ \Delta H(\alpha_m,A_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta L(\alpha_m^0,A_0^0)\\ \Delta H(\alpha_m^0,A_0^0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\Delta L}{\partial\alpha_m} & \dfrac{\partial\Delta L}{\partial A_0}\\ \dfrac{\partial\Delta H}{\partial\alpha_m} & \dfrac{\partial\Delta H}{\partial A_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_m-\alpha_m^0\\ A_0-A_0^0\end{bmatrix}\tag{1}$$

一般也有函数关系: $A_0=A_0(\Delta L,\Delta H)$、$\alpha_m=\alpha_m(\Delta L,\Delta H)$。

将 $\alpha_m$、$A_0$ 在 $\Delta L^0$、$\Delta H^0$ 处做线性展开:

$$\begin{bmatrix}\alpha_m(\Delta L,\Delta H)\\ A_0(\Delta L,\Delta H)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_m(\Delta L^0,\Delta H^0)\\ A_0(\Delta L^0,\Delta H^0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\alpha_m}{\partial\Delta L} & \dfrac{\partial\alpha_m}{\partial\Delta H}\\ \dfrac{\partial A_0}{\partial\Delta L} & \dfrac{\partial A_0}{\partial\Delta H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta L-\Delta L^0\\ \Delta H-\Delta H^0\end{bmatrix}\tag{2}$$

从式(2)知, 以($\alpha_m^0$、$A_0^0$) 为初值计算弹道得到落点偏差($\Delta L^0$、$\Delta H^0$), 若已知偏导数 $\dfrac{\partial A_0}{\partial\Delta L}$, $\dfrac{\partial A_0}{\partial\Delta H}$, $\dfrac{\partial\alpha_m}{\partial\Delta L}$, $\dfrac{\partial\alpha_m}{\partial\Delta H}$, 则可以得到使落点偏差($\Delta L$、$\Delta H$) 为(0,0) 的($\alpha_m$、$A_0$)。

事实上, 由式 (1) 和式 (2) 有:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_m}{\partial \Delta L} & \frac{\partial \alpha_m}{\partial \Delta H} \\ \frac{\partial A_0}{\partial \Delta L} & \frac{\partial A_0}{\partial \Delta H} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial A_0}\frac{\partial \Delta L}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial \Delta L}{\partial A_0}\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_m}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta H}{\partial A_0} & -\frac{\partial \Delta L}{\partial A_0} \\ -\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial \Delta L}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

式(3)右边的偏导数可以利用求差法得到：第一次以 $\alpha_m^0$、$A_0^0$ 为初值计算弹道，得到落点偏差 $\Delta L^0$、$\Delta H^0$；第二次以 $\alpha_m^1(=\alpha_m^0)$、$A_0^1(=A_0^0+\delta A_0)$ 为参数计算弹道，得到落点偏差 $\Delta L^1$、$\Delta H^1$；第三次以 $\alpha_m^2(=\alpha_m^0+\delta\alpha_m)$、$A_0^2(=A_0^0)$ 为参数计算弹道，得到落点偏差 $\Delta L^2$、$\Delta H^2$。于是有偏导数：

$$\frac{\partial \Delta L}{\partial \alpha_m} = \frac{\Delta L^2 - \Delta L^0}{\delta \alpha_m}$$

$$\frac{\partial \Delta L}{\partial A_0} = \frac{\Delta L^1 - \Delta L^0}{\delta A_0}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha_m} = \frac{\Delta H^2 - \Delta H^0}{\delta \alpha_m}$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial A_0} = \frac{\Delta H^1 - \Delta H^0}{\delta A_0}$$

基于上述分析可以设计迭代算法求满足精度要求($\Delta H < \delta_H, \Delta L < \delta_L$)的最大攻角 $\alpha_m$ 和发射方位角 $A_0$。迭代算法的流程图如图2所示。

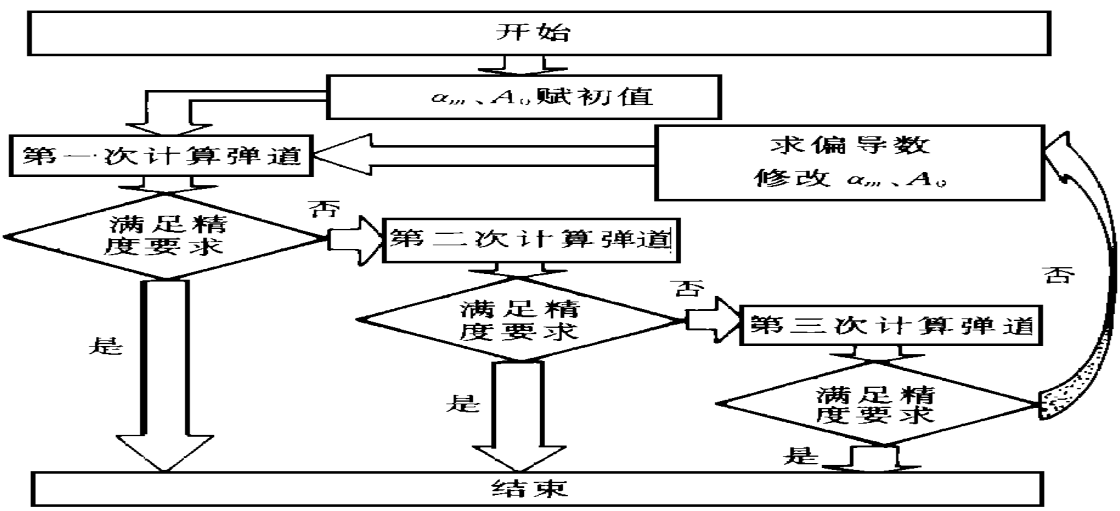


图2 迭代算法流程图

Fig. 2 Flowchart for iterative method

## 3 实际算例

假设发射的初始条件为：发射点：经度= 121°，纬度= 38°；目标点：经度= 126°，纬度= 31.5°；精度要求：$\Delta H < 50$m，$\Delta L < 50$m。

应用牛顿迭代法求最大攻角 $\alpha_m$ 和发射方位角 $A_0$，经过10次迭代计算得到：$A_0 = 141.659°$，$\alpha_m = 1.9262°$，$\Delta H = 13.6406$m，$\Delta L = 0.581988$m。可见应用牛顿迭代法得到了满意的结果，落点偏差满足要求。牛顿迭代法的收敛要满足一定的条件，由于本文问题的函数没有解析的表达式，采用的是数值解法，所以无法验证牛顿迭代法的收敛条件，但是实际的计算表明都是可以收敛的，迭代次数通常在10～13次，与所选择的初始值有关。

## 4　迭代初值的选取

发射时的已知条件是发射点和目标点的经度、纬度, 若编制一个数据表, 包含最大攻角 $\alpha_m$、发射方位角 $A_0$ 与球面射程 $L$、发射点和目标点的球面方位角 $A_0^C$ 及发射点纬度 $\Phi_L$ 的关系, 在实际的应用中就可以十分方便的确定最大攻角 $\alpha_m$、发射方位角 $A_0$, 这里称该表为简易射表。在制作简易射表过程中计算弹道的标准发射条件称为表定条件, 如果表定条件考虑得比较复杂, 则计算出的射表应用价值就较高。本文选择表定条件为: 地球是一个旋转的标准椭球体; 地球引力场考虑到二阶带谐项; 发射点和目标点的海拔高度为零; 没有风, 气象条件为标准大气; 导弹的所有基本参数与设计值相同。

(1) 简易射表的格式

这里设计的简易射表包括两个三维数据表, 表 1 为最大攻角 $\alpha_m$、发射方位角 $A_0$、发射点纬度 $\Phi_L$ 以及发射点和目标点的球面方位角 $A_0^C$ 的数据表 $A_0^C(\alpha_m, A_0, \Phi_L)$, 表 2 为最大攻角 $\alpha_m$、发射方位角 $A_0$、发射点纬度 $\Phi_L$ 以及球面射程 $L$ 的数据表 $L(\alpha_m, A_0, \Phi_L)$。当然, 制造这样的数据表意味着大量的计算。

(2) 反插值算法

基于上面的简易射表可以设计如下的反插值算法:

(a) 给发射方位角 $A_0$ 赋初值 $A_0^0$( 取为发射点和目标点的球面方位角 $A_0^C$) ;

(b) 以 $A_0^0$、发射点纬度 $\Phi_L$ 为已知值插值数据表 2, 得到一个关于 $\alpha_m$ 与 $L$ 关系的一维数据表, 由此表插值得到实际发射点和目标点的球面射程 $L$ 对应的最大攻角 $\alpha_m^0$;

(c) 以发射点和目标点的球面方位角 $A_0^C$、最大攻角 $\alpha_m^0$、发射点纬度 $\Phi_L$ 为已知值反插值数据表 1, 得到发射方位角 $A_0^1$, 如果 $|A_0^1 - A_0^0| < \delta$, 则停止, 否则, 将 $A_0^1$ 赋给 $A_0^0$, 回到 (b) 继续。

(3) 实际算例

以前文牛顿迭代法的算例来检验上述方法的效率。应用上述反插值算法可以得到: 发射方位角 $A_0 = 141.661°$; 最大攻角 $\alpha_m = 1.92643°$。以此为迭代初值经过 4 次迭代计算得到: $\Delta H = -0.0171821\mathrm{m}$; $\Delta L = 2.17512\mathrm{m}$, 已经满足精度要求, 迭代的次数减少了。经大量计算表明, 利用上述反插值算法的结果做为迭代初值, 只需要 4 次迭代计算就可以得到满足精度要求的结果, 比无简易射表的情形大大减少了迭代次数。

## 5　结论

在本文的讨论中, 所使用的导弹仿真模型是一个简化模型, 未考虑任何工具误差和干扰因素。如果对此仿真模型进行一定的加深和改进, 如在模型中考虑发射点、目标点环境因素对导弹飞行的影响, 测量系统的延迟和误差, 推力系统的变化和偏差等诸多情况, 则导弹模型的仿真置信度提高, 此时本文所提出的进行诸元装订的迭代算法依然适用, 估计迭代次数约为 10～13 次, 与无简易射表的情形相同, 因为此时只是弹道仿真具体模型的改变而已。由于本文简易射表表定条件的限制, 利用简易射表提供的初值进行迭代计算, 迭代次数可能多于 4 次, 具体情况尚待进一步仿真计算研究。

## 参考文献

1　贾沛然, 陈克俊, 何力. 远程火箭弹道学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993

2　陈克俊. 载人飞船上升段轨道的 Newton 迭代设计法. 国防科技大学学报, 1992, (2)

3　[苏] 　.　. 西纽科夫等. 固体弹道式导弹. 北京: 国防工业出版社, 1984

4　[苏] 　.　. 瓦弗洛缅也夫, 　.　. 科普托夫著. 弹道式导弹设计和试验. 邸晓华、詹世斌、陈诗兴译. 北京: 国防工业出版社, 1977