

## 一维非均匀分布参数系统的渐近传递函数方法\*

冯志刚 周建平 李海阳

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 提出了一维非均匀分布参数系统的一种通用解法: 渐近传递函数方法。对一般的一维非均匀分布参数系统, 引入状态变量将控制方程及边界方程写成状态空间形式。通过定义小参数和摄动方法, 使之变成常系数微分方程, 从而得到问题的摄动解。各阶摄动解均具有规范的形式, 是一以传递函数为积分核的积分形式解析解。文中最后给出了一些数值算例, 验证了方法的有效性。

**关键词** 传递函数, 摄动法, 非均匀分布参数系统

**分类号** TB12

## The Asymptotic Method for One Dimensional Non-uniform Distributed Parameter Systems by Distributed Transfer Function Method

Feng Zhigang Zhou Jianping Li Haiyang

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** Non-uniform beam-like structures have been widely used in engineering structures to achieve an optimal distribution of strength, stiffness and modes of vibration to satisfy design requirements. In this paper, a new asymptotic method for the analysis of these systems is presented. The linear partial differential equation which governs the response of the beam and the inhomogeneous boundary conditions have been put into a state space form. Choosing the small parameter  $\epsilon$  as a perturbation parameter, the asymptotic solutions are determined by the state space technique. Numerical examples are provided to illustrate the efficiency of the method.

**Key words** transfer function, the perturbation method, non-uniform distributed parameter system

非均匀分布参数系统作为一种优化结构在工程界有着广泛的应用, 与此同时, 新材料如复合材料、智能材料及其结构等的广泛应用, 有些材料还内埋感应器与执行器, 都使结构系统的非均匀特性进一步复杂化。由于非均匀分布参数系统对应的控制方程是变系数微分方程, 数学上精确求解存在困难, 对大部分问题都只能求得近似解。典型的近似方法有差分法, 阶递折算法, 精确解析法, 直接法, Rayleigh-Schmidt 逼近法, Bessel 函数法<sup>[1]</sup>, 传递函数法<sup>[2]</sup>, Frobenius 法, 有限元法<sup>[3]</sup>, 摄动法, 传递矩阵法<sup>[4]</sup>和加权残数法<sup>[5]</sup>等。这些方法各有利弊。本文以一维非均匀线性分布参数系统为例, 介绍了一种构造非均匀分布参数系统超级单元的方法。对由多个超级单元构成的复杂系统, 可通过在每个超级单元的边界节点上定义广义力平衡条件, 实现与其它超级单元的拼装。甚至还可以把本文介绍的方法看做是一种有限元新的形函数矩阵的构造方法, 从而实现与有限元单元的无缝连接。最后通过传递函数法和摄动方法获得其高精度的渐近解析解。

## 1 一维非均匀分布参数系统超级单元

本文讨论在一个超级单元中只有一个变化的结构参数的非均匀系统。不失一般性, 设一非均匀分布参数系统的结构形状如图 1。考虑在  $x - y$  平面内的静力变形, 单元的运动微分控制方程可写为

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} w(x) = f(x) \quad x \in [x_0, x_1] \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金、国家教委归国留学人员基金和校预研基金资助

1998 年 6 月 15 日收稿

第一作者: 冯志刚, 男, 1969 年生, 博士

其中  $x^0, x^1$  是单元的边界结点,  $n$  是对  $x$  坐标的最高求导阶次, 系数  $a_k(x)$  计及了由于单元的几何变截面或材料非均匀而导致的各种非均匀特性的影响,  $f(x)$  是外力。

定义状态空间向量为:

$$\eta(x) = \left\{ w(x) \quad \frac{dw}{dx} \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}w}{dx^{n-1}} \right\}^T \quad (2)$$

则可将方程 (1) 写成状态方程形式

$$\frac{d}{dx} \eta(x) = F(x) \eta(x) + q(x) \quad (3)$$

其中  $q(x) = \{0 \ 0 \ \dots \ f(x)/a^n(x)\}^T, F_k(x) = a^k(x)/a^n(x), (k = 0, 1, \dots, n-1)$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -F_0(x) & -F_1(x) & -F_2(x) & \dots & -F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

设该超级单元中有变化的结构参数为  $\phi(x)$ , 由于其在单元内的变化是有限的, 可用如下的  $m+1$  项幂级数进行逼近

$$\phi(x) = \phi + \sum_{k=1}^m \frac{\phi_k(x)}{k!} \epsilon^k \quad (4)$$

其中  $\phi_k(x), (k = 1, 2, \dots, m)$  由最佳平均逼近公式决定,  $\phi$  为常数,  $\epsilon$  为一小参数。

方程(1) 中的变系数是由  $\phi(x)$  引起的, 则

$$a_k(x) = a_k(\phi) \quad F_k(x) = F_k(\phi) \quad (5)$$

将  $F_k(\phi)$  在  $\epsilon = 0$  点处展开成泰勒级数, 有

$$F_k(\phi) = F_k^0 + \epsilon F_k^1(x) + \epsilon^2 F_k^2(x) + \epsilon^3 F_k^3(x) + \dots \quad (6)$$

其中

$$F_k^0 = F_k(\phi), F_k^1(x) = \left. \frac{dF_k}{d\phi} \right|_{\epsilon=0} \phi(x), F_k^2(x) = \frac{1}{2!} \left\{ \phi(x) \left. \frac{d^2F_k}{d\phi^2} \right|_{\epsilon=0} + \phi_2(x) \left. \frac{dF_k}{d\phi} \right|_{\epsilon=0} \right\}$$

$$F_k^3(x, \dots) = \frac{1}{3!} \left\{ \phi(x) \left. \frac{d^3F_k}{d\phi^3} \right|_{\epsilon=0} + 3\phi(x)\phi_2(x) \left. \frac{d^2F_k}{d\phi^2} \right|_{\epsilon=0} + \phi_3(x) \left. \frac{dF_k}{d\phi} \right|_{\epsilon=0} \right\}$$

利用 (6) 式, 则可将  $F(x)$  写成

$$F(x) = F_0 + \epsilon F_1(x) + \epsilon^2 F_2(x) + \dots \quad (7)$$

其中

$$F_0(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_0^0(s) & -F_1^0(s) & \dots & -F_{n-1}^0(s) \end{bmatrix}$$

$$F_i(x, s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_0^i(x, s) & -F_1^i(x, s) & \dots & -F_{n-1}^i(x, s) \end{bmatrix}$$

同样将解向量  $\eta(x)$  按小参数  $\epsilon$  进行摄动:

$$\eta(x, \epsilon) = \eta_0(x) + \epsilon \eta_1(x) + \epsilon^2 \eta_2(x) + \epsilon^3 \eta_3(x) + \dots \quad (8)$$

则

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta_0}{dx} + \epsilon \frac{d\eta_1}{dx} + \epsilon^2 \frac{d\eta_2}{dx} + \epsilon^3 \frac{d\eta_3}{dx} + \dots \quad (9)$$

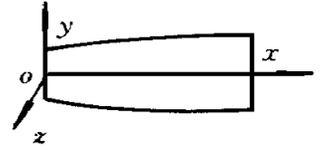


图1 一维超级单元

Fig. 1 One dimensional super element

将式 (7), (8), (9) 代入式 (6) 有:

$$\frac{d\eta_0}{dx} + \epsilon \frac{d\eta_1}{dx} + \epsilon^2 \frac{d\eta_2}{dx} + \dots = (F_0 + \epsilon F_1(x) + \epsilon^2 F_2(x) + \dots)(\eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots) + q(x) \quad (10)$$

令 (10) 式  $\epsilon$  各次幂的系数相等, 得到摄动方程

$$\begin{cases} \frac{d\eta_0}{dx} = F_0 \eta_0(x) + q(x) \\ \frac{d\eta_i}{dx} = F_0 \eta_i(x) + \sum_{k=0}^{i-1} F_{i-k}(x) \eta_k(x), i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (11)$$

求解问题由方程 (6) 至 (11) 有了质的变化, (6) 是一个变系数的微分方程, 数学上求解难度很大, 且难于形成规范的求解过程与表达式, 而 (11) 则均为常系数微分方程组, 数学上求解有较成熟的方法, 从而降低了问题的求解难度。

## 2 定解条件的引入与传递函数解法

在边界  $x = x_0, x = x_1$  上定义如下的广义位移

$$\delta_L = \left\{ w(x_0), \frac{dw(x_0)}{dx}, \dots, \frac{d^{\frac{n}{2}-1}w(x_0)}{dx^{\frac{n}{2}-1}} \right\}, \quad \delta_R = \left\{ w(x_1), \frac{dw(x_1)}{dx}, \dots, \frac{d^{\frac{n}{2}-1}w(x_1)}{dx^{\frac{n}{2}-1}} \right\} \quad (12)$$

则该单元的边界条件总可写成

$$M\eta(x_0) + N\eta(x_1) = \delta_e \quad (13)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \\ O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} & O_{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}} \end{bmatrix} \quad \delta_e = \{\delta_L, \delta_R\}^T$$

引用 (8) 式, 方程 (13) 可写为:

$$M \left[ \eta_0(x_0) + \epsilon \eta_1(x_0) + \epsilon^2 \eta_2(x_0) + \dots \right] + N \left[ \eta_0(x_1) + \epsilon \eta_1(x_1) + \epsilon^2 \eta_2(x_1) + \dots \right] = \delta_e \quad (14)$$

则关于  $\epsilon$  的各次幂的方程的定解边界条件为:

$$M\eta_0(x_0) + N\eta_0(x_1) = \delta_e \quad (15a)$$

$$M\eta_i(x_0) + N\eta_i(x_1) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (15b)$$

将 (11a) 与 (15b) 联立, 由传递函数解法得

$$\eta_0(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) q(\xi) d\xi + H(x) \delta_e \quad (16)$$

其中

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{F_0(x-\xi)} [M e^{F_0 \xi} + N e^{F_0(x_1-\xi)}]^{-1} M e^{F_0(x_1-\xi)}, & \xi < x \\ H^{-1}(x) e^{F_0(x-\xi)} [M e^{F_0 \xi} + N e^{F_0(x_1-\xi)}]^{-1} N e^{F_0(x_1-\xi)}, & \xi > x \end{cases}$$

将 (11b) 与 (15b) 联立, 由传递函数解法得

$$\eta_i(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) \sum_{k=0}^{i-1} F_{i-k}(\xi) \eta_k(\xi) d\xi \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

于是, 单元响应问题的  $n$  阶渐近解为:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta_0(x) + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \eta_i(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} G(x, \zeta) q(\zeta) d\zeta + H(x) \delta_e + \sum_{i=1}^n \epsilon^i \int_{x_0}^{x_1} G(x, \zeta) \sum_{k=0}^{i-1} F_{i-k}(\zeta) \eta_k(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

其中解的前两项为均匀分布参数系统在外载荷  $q(x, s)$  作用下动态响应问题的解析解, 第三项体现了系统的非均匀特性对解的影响。当  $n$  充分大时, 上述解是精确解的一个很好的近似。

在求得超级单元的解后,可在单元边界结点上定义广义力平衡条件,类似有限元法进行单元拼装,然后再代入整个结构系统的边界条件,求得系统的响应。具体方法请参见文献[7]。

### 3 数值算例

本文以矩形变截面梁为例,应用了上述方法。

(1) 悬臂梁受集中载荷的作用,如图2。

对  $h_0/h_1 = 0.8$ , 计算其自由端的挠度。以有限元法取 500 个单元时的解为参考解,表 1 给出了用本文方法取不同的摄动阶数所获得的求解结果。表 2 则给出了用有限元法取不同单元数的结果。

表 1 悬臂梁自由端挠度 (本文解)

Tab. 1 The free end deflection of the cantilever (this paper)

	一阶摄动	二阶摄动	三阶摄动	四阶摄动
本文解/参考解	0.827858	1.03022	0.994566	1.00001

表 2 悬臂梁自由端挠度 (有限元解)

Tab. 2 The free end deflection of the cantilever (FEM)

	1个单元	2个单元	10个单元	14个单元
有限元解/参考解	1.16287	1.0377	1.00083	1.00008

(2) 变截面梁组合结构,如图3。

其中  $h_1 = h_2, h_0/h_1 = 0.9, L_1 = L_2$ , 用有限元法 (100 个单元) 的解作为参考解,本文方法 (2 个单元, 4 阶摄动) 求解了中间点的挠度、固定端的弯矩与剪力, 求解结果见表 3。

表 3 组合变截面梁解

Tab. 3 Solution of the non-uniform structural

	中点挠度	固定端弯矩	固定端剪力
本文解/参考解	0.99998	0.99995	0.99992

### 4 结论

针对一维非均匀分布参数系统,本文提出了一种形式简捷、求解过程统一的渐近传递函数方法。所提供的简单算例初步显示了此方法的优越性,具有精度高,收敛快的优点。单元划分数只要一两个,摄动阶数达到三四阶就可得到具有足够精度的结果,所以这一工作对于工程实践是有实际意义的。

### 参考文献

- Lau J H. Vibration Frequency of Tapered Bars with End Mass. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51: 179 ~ 181
- Tan C A, Kuang W. Distributed Transfer Function Analysis of Cone And Wedge Beams. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170 (4): 557 ~ 566
- Klein L. Transverse Vibrations of Non-uniform Beams. Journal of Sound Vibration, 1974, 37 (4): 491 ~ 505
- 周叮. 非均质变截面折线形梁的面外振动的传递矩阵法. 上海力学, 1991, 12 (2): 69 ~ 76
- Snakaran G V, Raju K K, Rao G V. Vibration Frequencies of a Tapered Beam With One End Spring-Hinged and Carrying a Mass at the Other Free End. Journal of applied Mechanics, 1975: 740 ~ 741
- Yang B. Distributed Transfer Function Analysis of Complex Distributed Parameter Systems. Journal of Applied Mechanics, 1994, 61: 84 ~ 92
- 冯志刚. 分面参数系统瞬态响应的传递函数理论: [学位论文]. 国防科技大学航天技术系, 1997

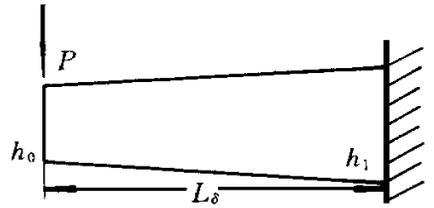


图 2 变截面悬臂梁

Fig. 2 A cantilever with varying sector

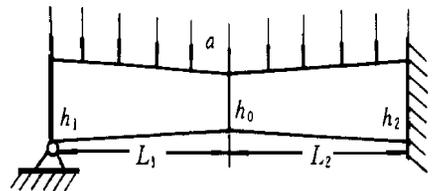


图 3 变截面梁组合结构

Fig. 3 A structural with two non-uniform beams