

## 重叠网格法在求解二维非定常欧拉方程中的应用\*

孔金珠 王承尧

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 采用时间和空间二阶精度的 TVD 格式数值模拟了二维楔的水平相对非定常运动过程与定常组合体流场。在数值模拟时, 我们采用了重叠网格技术。这种方法大大减轻了复杂外形的网格生成工作量, 而且重叠网格间可以有相对运动, 这使我们对相对运动物体流场的数值模拟简便易行。

**关键词** 重叠网格, 相对运动流场, 非定常 Euler 方程, 动网格

**分类号** V211. 3

## Application of Grid-Embedding Technique to 2-D Unsteady Inviscid Flowfield

Kong Jinzhu Wang Chengyao

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** A two-dimensional TVD scheme with second order accuracy in space and time is used to simulate the horizontal relative motion flowfield between wedges. Grid-embedding technique is applied to calculate the unsteady flowfield. This technique simplifies the construction of computational grids about complex geometries and allows relative motion between embedded grids.

**Key words** embedded grid, relative motion flowfields, unsteady Euler-equations, dynamic grid

航空航天事业的发展, 对新型大气飞行器的性能提出了更高的要求。许多高速飞行器为了增加操作的可靠性和灵活性, 往往将载荷悬挂于机身之外或半嵌于机身上, 这使得飞行器的外形非常复杂, 而且在作战时常常把这些载荷释放, 形成释放物与飞行器有相对运动。对这些飞行器绕流流场进行数值模拟时, 若采用传统的单一网格, 则不可避免地产生如下缺点: 计算网格扭曲厉害, 尖点多; 网格分布不合理; 网格生成费时, 且对计算的精度, 稳定性和收敛性产生很不利的影响。为了解决上述问题, 人们发展了许多方法, 其中最突出的一种是重叠网格法。

## 1 基本控制方程

本文采用一般坐标系下的非定常 Euler 方程。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = J^{-1} \mathbf{Q}, \mathbf{F} = J^{-1} [\xi_x \mathbf{Q} + \xi_x \mathbf{F} + \xi_y \mathbf{G}], \mathbf{G} = J^{-1} [\eta_x \mathbf{Q} + \eta_x \mathbf{F} + \eta_y \mathbf{G}]$$

$$J = [x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}]^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T, \mathbf{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \xi_x \\ \rho v U + p \xi_y \\ (e + p) U - p \xi_x \end{bmatrix}, \mathbf{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p \eta_x \\ \rho v V + p \eta_y \\ (e + p) V - p \eta_x \end{bmatrix}$$

$$U = \xi_t + u \xi_x + v \xi_y, V = \eta_t + u \eta_x + v \eta_y; \xi_x = -\xi_{x\tau} - \xi_{y\tau}, \eta_x = -\eta_{x\tau} - \eta_{y\tau}$$

其中,  $U, V$  称为逆变速度。以下为了方便起见, 省略“-”号。

在时间方向采用二阶精度差分格式, 将方程 (1) 写成:

\* 1998 年 5 月 4 日收稿

第一作者: 孔金珠, 男, 1974 年生, 研究实习员

$$\left[ I + \frac{\Delta\tau}{2} \hat{c}_\xi A^n + \frac{\Delta\tau}{2} \hat{c}_\eta B^n \right] \Delta Q^n = RHS \tag{2}$$

$$RHS = - \Delta\tau (\hat{c}_\xi F + \hat{c}_\eta G)^n$$

其中

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q}, B = \frac{\partial G}{\partial Q}, \Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n$$

对(2)式右端,我们采用具有空间二阶精度OC-TV D格式,该格式分辨率高,间断捕捉能力强。对(2)式左端采用最大特征值分裂方法,以A为例,具体形式如下:

$$A^{* \pm} = \frac{1}{2}(A^* \pm \lambda_{\max})$$

$\lambda_{\max} = \max(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4)$ ,  $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$  为A的特征值。

这样整个差分方程可写成:

$$R\delta Q_{i,j}^n - \frac{1}{2}A_{i-1,j}^{+n} \delta Q_{i-1,j}^n - \frac{1}{2}B_{i,j-1}^{+n} \delta Q_{i,j-1}^n = RHS \tag{3}$$

$$- \frac{1}{2}A_{i+1,j}^{-n} \delta Q_{i+1,j}^n - \frac{1}{2}B_{i,j+1}^{-n} \delta Q_{i,j+1}^n$$

$$R\delta Q_{i,j}^n + \frac{1}{2}A_{i+1,j}^{-n} \delta Q_{i+1,j}^n + \frac{1}{2}B_{i,j+1}^{-n} \delta Q_{i,j+1}^n = RHS$$

$$+ \frac{1}{2}A_{i-1,j}^{+n} \delta Q_{i-1,j}^n + \frac{1}{2}B_{i,j-1}^{+n} \delta Q_{i,j-1}^n$$

$$R = \left[ 1 + \frac{\Delta\tau}{2} (\lambda_{A\max} + \lambda_{B\max}) \right] I$$

对(3)式,我们采用左右扫描的方法求解,不需复杂的块矩阵求逆。方法简单,计算省时。

## 2 重叠网格技术

网格重叠法包括两个部分,(1)将计算域划分为若干相互重叠的子区域;(2)不同网格之间的数据通信。在划分网格时,为了使分割后的各区域外形简单,容易设计网格,我们往往将含有重叠网格的子区域从主区域上去掉。这样,重叠网格就在包含它的主网格上形成了一个孔(Hole)。孔内所包含的网格单元将不再参加主区域的计算。网格间通过重叠区域内的插值传递数据。因而采用网格重叠法求解流场可分成两个步骤:(1)生成组合的网格,在网格间通过插值传递信息;(2)在每个网格上数值求解流动方程。在设计重叠网格时,常有一个主网格将整个流

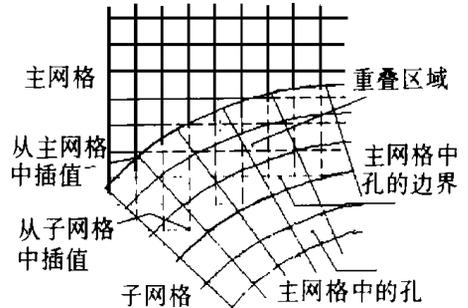


图1 重叠网格示意图

Fig. 1 Illustration of embedded grid

场包含在里面,子网格只包含流场中的某一物体。子网格是独立于主网格的,因而它相对于主网格可以自由地运动。图1为重叠网格示意图。网格间的通信采用双线性插值,其具体形式为:

$$V(x,y) = \frac{1}{4}[(1-\alpha)(1-\beta)V_1 + (1+\alpha)(1-\beta)V_2 + (1+\alpha)(1+\beta)V_3 + (1-\alpha)(1+\beta)V_4]$$

其中,V为待求点的函数值, $V_1, V_2, V_3, V_4$ 为邻近插值点的函数值, $\alpha, \beta$ 由插值点与被插值点的相对位置确定。

## 3 定常计算

下面是一个将重叠网格法应用于定常流场模拟的算例。

计算所用的物形如图2,下方为平板,上方为钝头体,来流  $M = 3.0$ 。图3为计算网格。图4为流场等压线。从等压线上,我们可以看到来流在钝头体头部形成一道弓形激波,激波与壁面相交,形成正激波。若采用传统的单一网格计算该流场,难度大,效果差;采用重叠网格法则轻而易举地解决

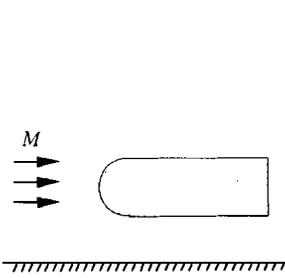


图2 定常流场物体外形

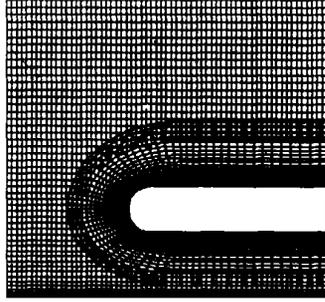


图3 定常计算网格

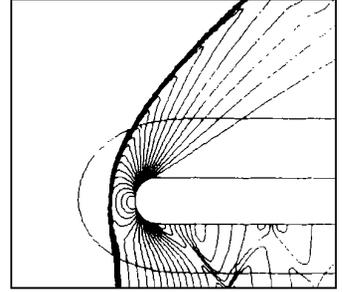


图4 定常流场等压线

Fig. 2 Configuration of steady flowfield Fig. 3 Computational grids of steady flowfield Fig. 4 Pressure contour of steady flowfield

了这个问题。

#### 4 非定常计算

为了验证方程、边界条件及网格间数值传递的准确性, 我们进行了以下计算, 两种计算条件分别为:

- (a) 来流  $V_1$ , 网格移动速度为  $-V_r$ 。
- (b) 来流  $V_1 + V_r$ , 网格移动速度为 0。

两种情况下的  $T, \rho$  都取相同的值。从理论力学角度讲, 两者计算所得结果应当相同, 图 5 分别为两种情况时的等压线。图 6 为楔表面压力曲线, 可以看到两种情况下, 物面压力几乎是完全重合的。这表明我们所采用的方法是正确的。

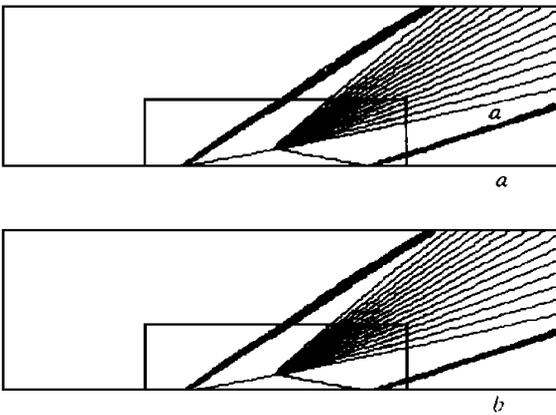


图5 等压线比较

Fig. 5 Comparison of pressure contour between condition (a) and (b)

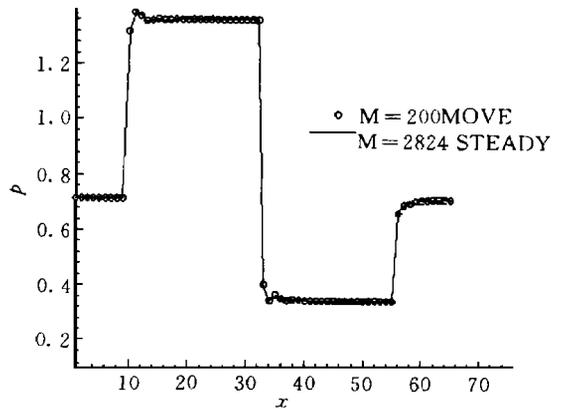


图6 物面压力线比较

Fig. 6 Comparison of surface pressure between condition (a) and (b)

最后本文将动网格技术与非定常计算结合起来模拟了物体的相对运动。这里所说的动网格就是将重叠网格固定在运动物体上, 随物体一起作刚性运动。由于重叠网格是连续移动的, 所以主网格中孔的边界也在不停地改变。

计算域如图 7, 来流条件  $M = 2.5, T = 400\text{K}$ , 攻角为 0。上下边界为对称面。上方楔静止不动, 下方楔以  $V_r = -120\text{m/s}$  的速度向左做匀直运动。

图 8 为计算网格。对于动网格, 其入口条件、出口条件及外边界条件与定常情况相同, 仅物面边界条件有所不同, 其物面边界条件为:

$V = 0$ , 其中  $U, V$  分布分别为  $\xi$  方向和  $\eta$  方向的逆变速度。其它参量可取  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ 。重叠



图7 非定常流场外形

Fig. 7 Configuration of unsteady flow field

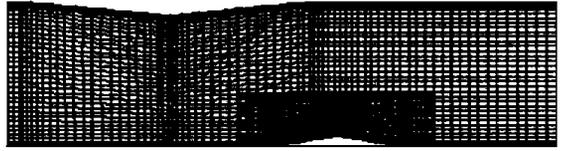


图8 非定常流场计算网格

Fig. 8 Computational grids of unsteady flow field

网格的数值传递和定常时完全相同。

图9为物体连续运动中的某个瞬时的流场等压线与静态定常解的比较。由于流场是无粘的，物体所受阻力为激波阻力。图10为运动楔处在不同位置时的阻力系数。阻力系数定义为  $C_d = \frac{2X}{\rho V^2 b}$ ，其中  $X$  为阻力， $b$  为运动楔的弦长。图中同时给出了静态计算结果，这些计算没有考虑楔之间的相对运动。从图中可以看到，静态结果和动态结果有明显差别，动态的阻力系数要大一些，这是由于考虑了楔运动后，相当于增大了来流速度，因而激波增强，迎风物面压力增加，阻力增大。

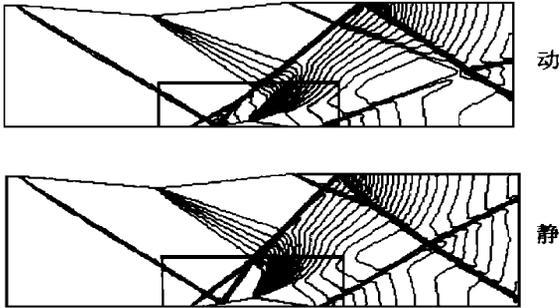


图9 运动解与定常解等压线比较

Fig. 9 Comparison of pressure contour between steady and unsteady solutions

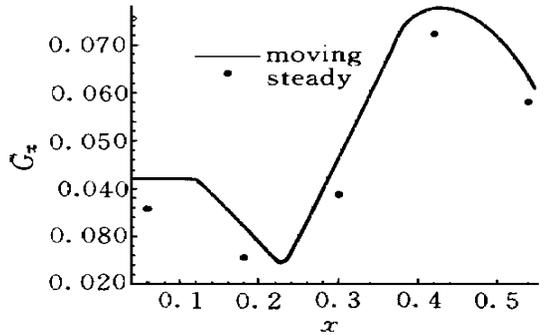


图10 运动解与定常解阻力系数比较

Fig. 10 Comparison of Cd between steady and unsteady solutions

### 5 结论

本文将重叠网格法用于二维 Euler 方程求解中，大大减轻了复杂外形网格生成的工作量。避免了计算网格扭曲过大，网格疏密分布不合理的状况。计算结果表明，在定常和非定常情况下，流场特性能在不同区域之间正确传递，计算稳定，结果可靠。因而可以预见，重叠网格法将在复杂外形流场和非定常流场计算中有很好的应用前景。

符号说明：

$\rho, p, e$  气流的密度, 压力, 内能;  $x, y$  变换前的坐标;  $\xi, \eta$  变换后的坐标;  $u, v$  气流  $x, y$  向的分速;  $\tau, t$  变换前后的时间坐标。

### 参考文献

- 1 Benek J A. A 3-D Chimera Grid Embedding Technique. AIAA 85-1523, 1985. 7
- 2 Benek J A, Steger J L, Dougherty F C. A Flexible Grid Embedding Technique with Application to the Euler Equation. AIAA 83-1944, 1987. 7
- 3 Dougherty F C. On Application of Chimera Grid Scheme to Store Separation. N86-13292, 1985. 10
- 4 Sahu J, Nietubiec C J. Application of Chimera Technique to Projectiles in Relative Motion. AIAA 93-3632, 1993. 7
- 5 Meakin R L, Suhs N. Unsteady Aerodynamic Simulation of Multiply Bodies in Relative Motion. N90-14188, 1989. 6