国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第2期　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.21 No.2 1999

小波阈值技术在图像降噪中的应用研究*

涂丹　沈建军　沈振康

(国防科技大学电子技术系　长沙　410073)

摘　要　通过对图像的小波变换系数进行阈值操作，可以有效降低噪声，同时又较好地保持图像细节。在文章中详细讨论了这种小波阈值降噪技术，并给出了在此种降噪方法中阈值选取的几种方法。由实验结果可以知道此种小波阈值方法是一种有效的图像降噪方法。

关键词　小波变换，阈值操作，图像降噪，图像细节

分类号　TP911.71

The Application of Wavelet Thresholding Method in Image De-Noise

Tu Dan　Shen Jianjun　Shen Zhenkang

(Department of Electronic Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In this paper, the application of wavelet transform in image de-noise is studied. Via thresholding operation in wavelet domain of image, it can reduce noise effectively, and at the same time, with a little loss of image detail. Detail discussion of this wavelet thresholding method is presented in this paper, and some methods of threshold selection are also given. It has been proved that the wavelet thresholding technology is an effective method for image de-noise.

Key words　wavelet transform, thresholding, image de-noise, image detail

图像降噪是图像预处理中一项应用比较广泛的技术，其作用是为了提高图像的信噪比，突出图像的期望特征。图像降噪方法有时域和频域两种方法，但是归根到底是利用噪声和信号在频域上分布的不同进行的：信号主要分布在低频区域，而噪声主要分布在高频区域，但同时图像的细节也分布在高频区域。所以，图像降噪中一个两难的问题是如何在降低图像噪声和保留图像细节上保持平衡，传统的低通滤波方法将图像的高频成分滤除，虽然能够达到了降低噪声的效果，但破坏了图像细节。如何构造一种既能够降低图像噪声，又能够保持图像细节的降噪方法是此项研究的目标，而这在小波变换这种强有力的信号分析工具出现以后已经成为可能。

由于小波变换同时具有时域和频域上的局部性特性，优于傅立叶变换，所以它一出现，很快就普遍应用于信号与图像处理中。本文介绍了一种基于小波变换的图像降噪方法——小波阈值方法。在文章中，详细介绍了小波阈值方法的理论基础和技术细节，给出了阈值的选取方法。

1　小波阈值方法

1.1　Daubechies 小波变换

函数 $\Psi(t)$ 被称为小波函数，当且仅当其傅立叶变换 $\Psi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t)e^{-2\pi i t\xi}dt$ 满足允许性条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega = C_\Psi < \infty \tag{1}$$

标准母小波 $\Psi(t)$ 分布在 0 周围，规定它的尺度为 1，子小波 $\Psi_{(s,b)}(t)$ 是如下定义的：

$$\Psi_{(s,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi\left(\frac{t-b}{s}\right) \tag{2}$$

其中，s 是尺度($s>0$)，实数 b 为偏移量。

*　1998年10月3日收稿
第一作者：涂丹，男，1971年生，博士生

Daubechies 构造了一类小波 $\Psi(t)$，这类小波是从尺度函数 $\Phi(t)$ 得出的，而尺度函数 $\Phi(t)$ 又是下列差分等式的解：

$$\Phi(t) = \sum_k C_k \Phi(2t - k) \tag{3}$$

在这个等式中，尺度参数是2，偏移变量是 k，如果系数序列 $\{c_k\}$ 是有限长度的，则小波函数 $\Psi(t)$ 和尺度函数 $\Phi(t)$ 是紧支撑的。

尺度系数 $\{c_k\}_{k=0}^{N-1}$ 满足下列条件：

正则条件 $$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = \sqrt{2} \tag{4}$$

正交条件 $$\sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0m}, \delta_{mn} \text{ 是离散Dirac Delta函数} \tag{5}$$

消失矩条件 $$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k k^m c_k = 0, \quad m = 0, 1, \cdots, p-1, p < N \tag{6}$$

正则条件保证了尺度函数 $\Phi(t)$ 定义了一个低通滤波器，消失矩条件必须在 $p = 1$ 是成立，以保证尺度上的所有偏移构成了 $L^2(R)$ 的一个正交基。

小波从序列 $\{c_k\}$ 构造出来，即

$$d_k = (-1)^{-k} c_{1-k} \tag{7}$$

$$\Psi(t) = \sum_k (-1)^k d_{1-k} \Phi(2t - 1) \tag{8}$$

则 $\{d_k\}$ 被称为小波系数，它定义了一个带通滤波器。

满足公式（3），（4），（5），（6），（7），（8）的紧支撑小波称为Daubechies小波，记为 D_P，其中 $P = 1, 2, \cdots, N = 2P$，下标P是消失矩的数目，N表示在离散小波变换中相应Daubechies小波系数的最小非零数目。

1.2 小波阈值方法

假设已经获得观测公式如下，

$$y_i = x_i + \sigma n_i \qquad i = 1, \cdots, N \tag{9}$$

其中 n_i 为零均值的白色高斯噪声，σ 为其方差，x_i 为期望信号，y_i 为观测值。滤除噪声 n_i 的问题可以认为是如何将 x 从观测值 y 中恢复出来。

记离散小波变换的变换矩阵为 W，则对（9）式进行小波变换得到：

$$Y = X + N \quad \text{或} \quad Y_i = X_i + N_i \tag{10}$$

这里，$Y = Wy, X = Wx, N = W\sigma n$. 对应于 W，存在逆变换矩阵 M，满足 $WM = I$.

由小波变换的特性知道，高斯噪声的小波变换仍然是高斯分布的，它是均匀分布在相空间的各个部分上的，而信号由于其带限性，它的小波变换系数仅仅集中在相空间上的一小部分，这样，从能量的观点来看，在小波域上，所有的小波系数都对噪声有贡献，也就是噪声的能量分布在所有的小波系数上，而只有一小部分小波系数对信号能量有贡献，所以可以把小波系数分成两类，第一类小波系数仅仅由噪声变换后得到，这类小波系数幅值小，数目较多，第二类小波系数由信号变换得来，并包含噪声的变换结果，这类小波系数幅值大，数目较小。从这点出发，可以通过这种小波系数幅值上的差异构造一种降噪方法。对信号的小波系数，设置一个阈值（由先验知识或自适应方法得到），大于这个阈值的小波系数认为属于第二类系数，即同时含有信号和噪声的变换结果，可以保留（简单保留或进行后续操作），而小于这个阈值的小波系数，则认为是第一类小波系数，即完全由噪声变换而来，去掉这些系数。这样达到了降低噪声的目的。而同时由于保留大部分包含信号的小波系数，又可以较好地保持图像细节。

假设 $\hat{x}$ 是 x 的一个基于 Y 的估计。构造对角线性映射矩阵为 $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_N)$，其中 $\delta_i \in \{0, 1\}, i = 1, \cdots, N$，这样就可以得到估计 $\hat{x} = M\hat{X} = M\Delta Y = M\Delta W y$

可以看出，估计 $\hat{X}$ 是通过对小波域上的 Y 进行了简单的阈值操作后得到的，对 Y 中的小波系数仅

仅通过保留或滤掉两种操作而得到估计 $\hat{X}$ 。

定义误差测度（l^2 意义上）为 $R(\hat{X},X) = \mathrm{E}[\|\hat{x} - x\|_2^2] = \mathrm{E}[\|M(\hat{X} - X)\|_2^2] = \mathrm{E}[\|\hat{X} - X\|_2^2]$

对于对角线性映射矩阵 Δ，它的最优取值是 $\{\delta_i = 1 \quad 当\ X_i > \sigma\}$，即只有相应的 X 值大于 σ 的 Y 值才会保留，其余 Y 值全部置为0。这样，理想的误差为 $R_{id}(\hat{X},X) = \sum_{n=1}^{N} \min(X^2, \sigma^2)$ 。当然，理想的误差是不可能达到的，只是提供了一个误差的最下限。

综上所述，小波降噪方法可以用一种三步策略来描述。

(1) 对观测值 y 进行小波变换，得到小波系数 $Y = Wy$ 。

(2) 在小波域上，对小波系数 Y 进行阈值操作，有两种方式，

硬阈值操作：$$\hat{X} = T_H(Y,t) = \begin{cases} Y & |Y| \geq t \\ 0 & |Y| < t \end{cases} \tag{11}$$

软阈值操作：$$\hat{X} = T_S(Y,t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(Y)(|Y| - t) & |Y| \geq t \\ 0 & |Y| < t \end{cases} \tag{12}$$

其中 t 为阈值，$\mathrm{sgn}(Y)$ 为 Y 的符号。

(3) 对阈值操作后的小波系数 $\hat{X}$ 进行小波反变换 $\hat{x} = M\hat{X}$，就得到 x 的估计 $\hat{x}$，也就是降噪的结果信号。

2 实验结果

小波阈值方法最重要的一步是在小波域上对小波系数进行阈值操作。阈值选择恰当与否直接影响到算法的有效性。文献[4]中提出一种阈值的确定公式，

$$t = \sqrt{2\log N}\,\sigma \tag{13}$$

其中 σ 为噪声方差，N 是图像的像素点数。

在实际应用中，我们发现按照公式(13)给出的阈值太大，使过多的小波系数被置为0，这样就破坏了太多的图像细节。经过实验，发现如果阈值取为 3σ，效果很好，既能够较好地滤除噪声，同时图像细节又保持得较好。

但是在实际环境中，图像噪声的方差是不可能知道的，因此需要对阈值的选取采用估计的方法。文献[1]中提出了一种阈值的估计方法：

$$\hat{t}_n = \gamma_1 \hat{\sigma} \sqrt{2\log N} \tag{14}$$

其中，
$$\hat{\sigma} = MAD/0.6745 \tag{15}$$

MAD 为精细尺度上小波系数 $(\omega_{J-1,k})_k$ 的中值。

这种方法计算比较复杂，实验结果也不能令人满意。在这里提出一种简单有效的阈值估计方法，在小波分解的第一级，取小波系数中的高/高部分，以它的标准偏差作为噪声方差 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，再利用公式 $3\hat{\sigma}$ 计算出阈值。

在实验中，我们将原始图像人为地加上高斯白噪声，利用本文介绍的小波阈值方法来降噪，小波变换采用 Daubechies 小波函数进行小波变换。图像大小为256×256，高斯白噪声方差 σ 分别为20，50。阈值操作采用硬阈值操作方法，阈值分别采用公式(13)、3σ 和我们提出的阈值估计方法。在对小波系数进行阈值操作时，一种是只对小波变换的高频部分的系数进行阈值操作，而小波变换的低频部分不进行任何操作，予以保留，另一种方法是对所有系数进行阈值操作，然后再重构信号。在本文给出的实验结果中，阈值操作是在所有的小波系数上进行的。

在图像噪声方差 σ 为50时，得到实验结果如表1所示。

从实验结果可以看出，小波降噪方法在图像降噪方面有着很好的效果。从 SNR 和 MSE 指标衡量，降噪后的图像在这两个指标上都有很大的提高。同时，从降噪后的图像上可以看出，图像的细节保持得较好，见图1。所以在实际应用中，小波降噪方法是一种很有效的降噪技术。

表1 实验结果数据，$\sigma = 50$

Tab. 1 the experiment data，$\sigma = 50$

	SNR	MSE
降噪前	9.827	2216.335
阈值为3σ的降噪结果	19.571	234.743
阈值为公式（13）时的降噪结果	19.224	254.290
阈值由估计得出时的降噪结果	20.117	207.001

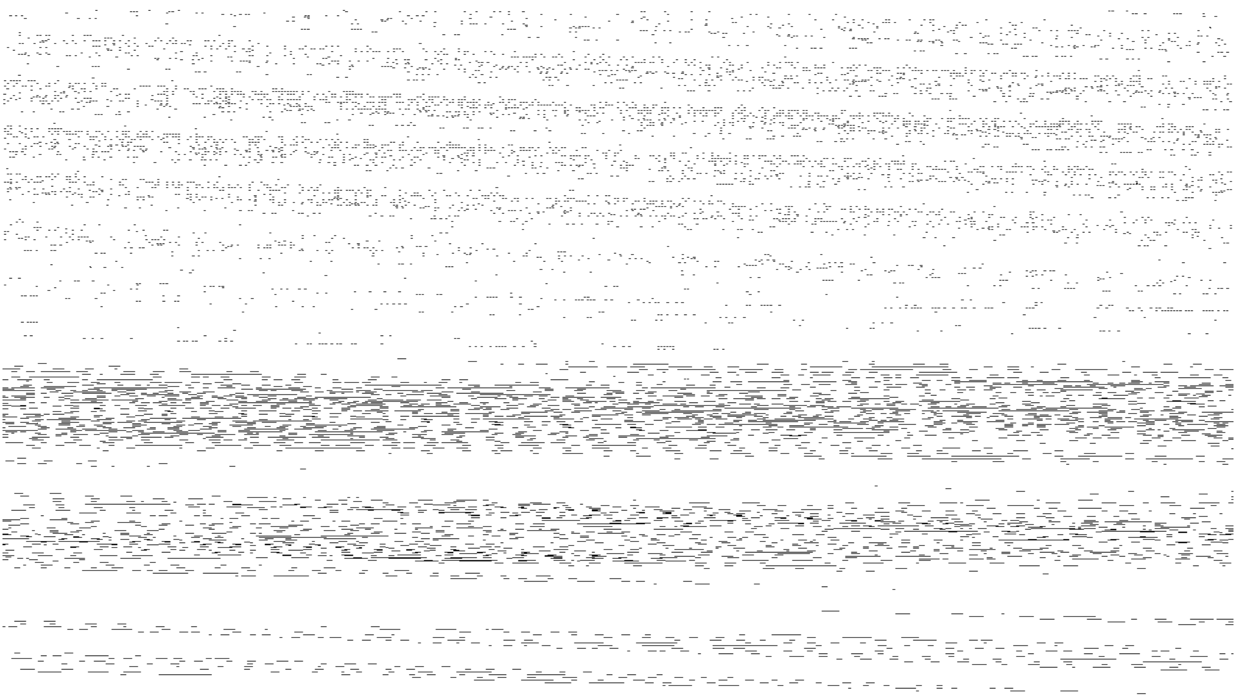

图1 实验结果图像，$\sigma = 20$

Fig. 1 The experiment result image，$\sigma = 20$

3 结论和讨论

本文只介绍小波阈值方法的基本细节，如前所述，小波阈值方法是一种很灵活的技术，有很多方面值得研究，在以后的工作中值得关注如下一些问题：

（1）小波变换的形式：本文是应用正交小波变换来进行小波阈值降噪，其实在图像降噪应用中，非正交小波交换，冗余小波变换等变换形式更适合于降噪应用，另外，在小波变换形式中，引入平移和方向上的不变性，对于降噪应用也很有帮助。

（2）阈值选取问题：新的阈值策略是不是可以对小波变换的不同级数和小波系数的不同部分利用不同的阈值进行操作，即采用局部阈值的方式。

参考文献

1 Donoho D L. De-Noising by Soft-Thresholding. IEEE Trans IT，1995，41（3）：613～627

2 Mallat S G. Multifrequency Channel Decompositions of Images and wavelet Models，IEEE Trans ASSP，1989，37(12)：2091～2110

3 Daubechies I. Ten lectures on Wavelets. Society for industrial and applied mathmatics，Philadelphia，PA，1992

4 Donoho D L. Wavelet Shrinkage and W. V. D. – A Ten-Minute Tour. Progress in Wavelet Analysis and Application，1993：109～128

5 Shensa M J. Wedding the a trous and Mallat algorithms. IEEE Trans IT，1992，40：2464～2482