

三态部件的可靠性分析*

张明

(国防科技大学自动控制系统 长沙 410073)

摘要 本文给出完备的三态部件的可靠性模型类。从静态的观点来看,三态部件的可靠性模型有两类:(1)成功,降格成功,失效;(2)成功,双失败。从动态的观点来看,考虑到三个状态之间的转化关系,其模型类相对复杂;但是在失败率 λ 、维修率 μ 为常数的条件下,只需六个参数($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3$),便可以用马尔可夫模型给出三态部件的可靠性统一模型,并给出部件在三状态的概率函数 $P_i(t)$ 的解析表达式(t 为时间, i 表示状态)。

关键词 三态部件, 失效率, 维修率, 马尔可夫模型, 可靠性分析

分类号 TP202.1

Reliability Analysis of Three-state Component

Zhang Ming

(Department of Automatic Control, NU DT, Changsha, 410073)

Abstract This paper deals with the reliability model set of three-state component. From the static view point, there are two kinds of models: (1) success, degraded, failure; (2) success, failure₁, failure₂. From the dynamic view point, we can give the unified reliability model of three-state component with six parameters ($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3$) when the failure rate and the maintenance rate are constant. Moreover, we can compute the probabilities of three states at any time t .

Key words three-state component, failure rate, maintenance rate, Markov model, reliability analysis

在实际工程系统中,存在着大量的三态部件,如给水系统,供电系统,通讯系统等。要对这些工程系统进行有效的可靠性分析,就必须建立三态部件的可靠性模型,计算各状态的概率函数。

本文从静态与动态的角度,全面考察三态部件的可靠性模型。

部件的静态分析在于正确划分部件的状态;而部件的动态分析在于正确描述部件各态的联系,从而给出部件各态的概率函数(关于时间的函数),为系统级的可靠性分析提供基础。

在以后的讨论中,我们作如下假设:(1)失效统计独立;(2)维修能使系统修复如新;(3)所有失效和维修率为常数;(4)部件的初始状态为完好(成功状态的概率为1)。

1 静态分析

从静态的观点来看,部件的三态划分只有两类:

(1) 状态0: 成功; 状态1: 降格成功; 状态2: 失效。

(2) 状态0: 成功; 状态1: 失效1; 状态2: 失效2。

第(1)类的工程实例:具有降额状态的发电装置;第(2)类的工程实例:射流阀,电子二极管,水阀等。

2 动态模型类

对应三态部件的静态划分,引入如下记号:

$P_i(t)$ 为在时间 t 时,部件第 i 状态的概率($i=0, 1, 2$)。

* 1998年4月9日收稿

第一作者:张明,男,1970年生,讲师

λ_j 为部件第 j 个恒定失效率, $j=1$ 为状态0到状态1, $j=2$ 为状态0到状态2, $j=3$ 为状态1到状态2, μ_j 为部件第 j 个恒定维修率, $j=1$ 为状态1到状态0, $j=2$ 为状态2到状态0, $j=3$ 为状态2到状态1.

对于部件三态为: 成功 (0), 降格成功 (1), 失效 (2), 其动态模型依据维修的程度可分为如下三大类:

(1) 无维修; (2) 部分维修; (3) 完全维修.

其动态模型共分为12种, 如表1所示.

表1 动态模型 (成功、降格成功、失败)

Tab. 1 Dynamic model (success, degraded, failure)

| 模型编号 | λ_1 | λ_2 | λ_3 | μ_1 | μ_2 | μ_3 | 时域解分类 | 维修程度 |
|------|-------------|-------------|-------------|---------|---------|---------|---------|------|
| 1 | 大于0 | 0 | 大于0 | 0 | 0 | 0 | 2, 3 | 无维修 |
| 2 | 大于0 | 0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 0 | 2 | 部分维修 |
| 3 | 大于0 | 0 | 大于0 | 0 | 0 | 大于0 | 2, 3 | 部分维修 |
| 4 | 大于0 | 0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 大于0 | 2 | 完全维修 |
| 5 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 0 | 0 | 2, 3 | 无维修 |
| 6 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 0 | 2 | 部分维修 |
| 7 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 大于0 | 0 | 2, 3, 4 | 部分维修 |
| 8 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 0 | 大于0 | 2, 3 | 部分维修 |
| 9 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 2, 3, 4 | 部分维修 |
| 10 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 大于0 | 2, 3, 4 | 部分维修 |
| 11 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 大于0 | 大于0 | 2, 3, 4 | 部分维修 |
| 12 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 2, 3, 4 | 完全维修 |

其中第1~4种模型, 成功态 (0) 与失败态 (2) 必须经过降格成功态 (1) 才能相互转化; 这种模型可以用来描述由两个相同的二态 (成功, 失败) 元件构成的并联子系统: 两个元件成功 定义为成功; 一个成功, 一个失败定义为降格成功; 两个失败定义为失败.

所有这12种模型实际上都可以看作一种模型, 即第1~11种模型都可以看作第12种模型的特例.

对于部件三态为: 成功, 双失败, 其动态模型也可依据维修程度分为 (1) 无维修; (2) 部分维修; (3) 完全维修. 但是由于双失败态之间不能相互转化, 因而只需4个参数即可描述. 如表2.

表2 动态模型 (成功、双失败)

Tab. 2 Dynamic model (success, failure1, failure2)

| 模型编号 | λ_1 | λ_2 | μ_1 | μ_2 | 时域解分类 | 维修程度 |
|------|-------------|-------------|---------|---------|-------|------|
| 13 | 大于0 | 大于0 | 0 | 0 | 1 | 无维修 |
| 14 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 0 | 2 | 部分维修 |
| 15 | 大于0 | 大于0 | 0 | 大于0 | 2 | 部分维修 |
| 16 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 大于0 | 2 | 完全维修 |

模型13~15可以看作模型16的特例; 模型14与模型15实质上是一种; 进一步模型16也可看作模型12的特例; 综上所述: 用6个参数便可完整描述三态部件的动态模型.

3 动态模型时域分析

文献 [1] 讨论了模型12, 但其解法是不完备的; 文献 [2] 讨论了部分可维修的模型6, 其解法直接引自于文献 [3] 但其解法也不完备. 图 1 是模型12的马尔可夫状态转移图, 依据此关系可写出微分方程:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \mu_1P_1(t) + \mu_2P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda_1P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_3)P_1(t) + \mu_3P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t) = \lambda_2P_0(t) + \lambda_3P_1(t) - (\mu_2 + \mu_3)P_2(t)$$

又设初始条件 $P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$, 作拉氏变换可得:

$$\begin{aligned} (s + \lambda_1 + \lambda_2)P_0(s) - \mu_1P_1(s) - \mu_2P_2(s) &= 1 \\ -\lambda_1 + P_0(s) + (s + \mu_1 + \lambda_3)P_1(s) - \mu_3P_2(s) &= 0 \\ -\lambda_2P_0(s) - \lambda_3P_1(s) + (s + \mu_2 + \mu_3)P_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

利用线性代数可解上述方程:

$$P_0(s) = \frac{s^2 + bs + c_0}{\Delta(s)}, P_1(s) = \frac{\lambda_2s + c_2}{\Delta(s)}, P_2(s) = \frac{\lambda_2s + c_2}{\Delta(s)}$$

其中 $\Delta(s) = s(s^2 + bs + c)$;

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\lambda_3; \\ c_1 &= \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_3 + \lambda_2\mu_3; \\ c_2 &= \lambda_1\lambda_3 + \mu_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3; \\ c &= c_0 + c_1 + c_2; \\ b_0 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda_3; b = b_0 + \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

对于模型1~16, 6参数为非负数, 只需分为四种情况来讨论:

- (1) $c = 0$ (仅对应模型 13);
- (2) $c > 0, b^2 - 4c > 0$;
- (3) $c > 0, b^2 - 4c = 0$;
- (4) $c > 0, b^2 - 4c < 0$;

其中各模型的时域解的分类情况可参考表1, 2。

文献 [1] 实际上只讨论了情况 (2)。下面分情况讨论:

先设 s_1, s_2 是 $s^2 + bs + c = 0$ 的根。

(1)

$$P_0(s) = \frac{1}{s + \lambda_1 + \lambda_2}, P_0(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \tag{1a}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda_1}{s(s + \lambda_1 + \lambda_2)}, P_1(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \tag{1b}$$

$$P_2(s) = \frac{\lambda_2}{s(s + \lambda_1 + \lambda_2)}, P_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \tag{1c}$$

(2) 显然此时 s_1, s_2 为不等的负数。同文献 [1], 可得:

$$P_0(t) = \frac{c_0}{c} + \frac{s_1^2 + bs_1 + c_0}{s_1(s_1 - s_2)}e^{s_1t} + \left[1 - \frac{c_0}{c} - \frac{s_1^2 + bs_1 + c_0}{s_1(s_1 - s_2)} \right] e^{s_2t} \tag{2a}$$

$$P_1(t) = \frac{c_1}{c} + \frac{\lambda_1s_1 + c_1}{s_1(s_1 - s_2)}e^{s_1t} - \left[\frac{c_1}{c} + \frac{\lambda_1s_1 + c_1}{s_1(s_1 - s_2)} \right] e^{s_2t} \tag{2b}$$

$$P_2(t) = \frac{c_2}{c} + \frac{\lambda_2s_1 + c_2}{s_1(s_1 - s_2)}e^{s_1t} - \left[\frac{c_2}{c} + \frac{\lambda_2s_1 + c_2}{s_1(s_1 - s_2)} \right] e^{s_2t} \tag{2c}$$

(3) 此时 $s_1 = s_2 = \frac{b}{2}$

$$P_1(s) = \frac{c_1}{c} \frac{1}{s} + \frac{c_1}{c} \frac{1}{s + \frac{b}{2}} + (\lambda_1 - \frac{bc_1}{2c}) \frac{1}{(s + \frac{b}{2})^2}$$

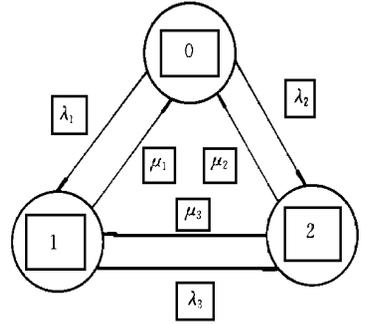


图1 马尔可夫模型

Fig. 1 Markov model

于是有:

$$P_1(t) = \frac{c_1}{c} - \frac{c_1}{c} e^{-\frac{b}{2}t} + (\lambda_1 - \frac{bc_1}{2c}) t e^{-\frac{b}{2}t} \quad (3b)$$

同理可得

$$P_2(t) = \frac{c_2}{c} - \frac{c_2}{c} e^{-\frac{b}{2}t} + (\lambda_2 - \frac{bc_2}{2c}) t e^{-\frac{b}{2}t} \quad (3c)$$

$$P_0(t) = \frac{c_0}{c} + (1 - \frac{c_0}{c}) e^{-\frac{b}{2}t} + (\frac{b}{2} - \frac{bc_0}{2c} - \lambda_1 - \lambda_2) t e^{-\frac{b}{2}t} \quad (3a)$$

(4) 此时, 记 $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4c - b^2}$, 于是:

$$P_1(t) = \frac{c_1}{c} \frac{1}{s} - \frac{c_1}{c} \frac{s + \frac{b}{2}}{(s + \frac{b}{2})^2 + \omega^2} + (\lambda_1 - \frac{bc_1}{2c}) \frac{1}{(s + \frac{b}{2})^2 + \omega^2}$$

$$P_1(t) = \frac{c_1}{c} - \frac{c_1}{c} e^{-\frac{b}{2}t} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\lambda_1 - \frac{bc_1}{2c}) e^{-\frac{b}{2}t} \sin \omega t \quad (4a)$$

同理

$$P_2(t) = \frac{c_2}{c} - \frac{c_2}{c} e^{-\frac{b}{2}t} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\lambda_2 - \frac{bc_2}{2c}) e^{-\frac{b}{2}t} \sin \omega t \quad (4b)$$

$$P_0(t) = \frac{c_0}{c} + (1 - \frac{c_0}{c}) e^{-\frac{b}{2}t} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\frac{b}{2} - \frac{bc_0}{2c} - \lambda_1 - \lambda_2) e^{-\frac{b}{2}t} \sin \omega t \quad (4c)$$

4 结束语

利用表1, 2, 我们可以给出三态部件的各类模型; 进一步结合表达式 (1a ~ 1c) (2a ~ 2c) (3a ~ 3c) (4a ~ 4c), 我们可以非常方便地计算三态部件各状态关于时间 t 的概率函数 $P_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$), 从而为系统可靠性分析提供坚实的基础。

初始条件改变时, 情况较为复杂, 但是其处理思路是一致的。

参考文献

- 1 迪隆 B S 著. 系统设计和应用的可靠性工程. 周广涛译. 北京: 宇航出版社, 1987: 300 ~ 303
- 2 Pham H, Suprasad A, Misra R B. Reliability Analysis of k-out-of-n Systems with Partially Repairable Multi-state Components. Microelectron. Reliab., 1996, 36 (10): 1407 ~ 1415
- 3 Misra K B. Reliability Analysis and Prediction. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992