国 防 科 大 学 学 报
第21卷 第2期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.21 No.2 1999

混合指数分布模型的 Bayes 分析*

李 荣

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 针对截尾试验数据的情况，给出了二元混合指数分布模型的平均寿命和可靠性函数的严格的 Bayes 点估计，并运用最大熵准则给出了可靠性函数的近似的 Bayes 置信下限估计。

关键词 混合指数分布模型，定数截尾试验，定时截尾试验，最大熵准则

分类号 TB114

Bayesian Analysis of the Mixture of Exponential Distributions

Li Rong

(Department of Automatic Control，NUDT，Changsha，410073)

Abstract In this paper, the exact Bayesian estimators of mean life and reliability function for the mixture of two exponential failure distrbutions are achieced, based on the censored test data from this model. The approximate low confidence limit estimate of reliability function is obtained by using maximum entropy method.

Key words mixture of exponential failure distribution, censored I test data, censored II test data, maximum entropy method

当系统是在不同的环境下制造或使用，或是由多种分布单元组成一般结构系统，其寿命分布模型往往已不再是一些简单的分布模型如二项分布、指数分布等，通常要用较为复杂的分布模型或一些简单分布的加权多项式（及混合分布模型）来描述。考虑如下的指数混合模型，其概率密度函数为

$$f(t/\theta_1,\theta_2) = [(p/\theta_1)\exp(-t/\theta_1) + (1-p)/\theta_2 \quad \exp(-t/\theta_2)] \tag{1}$$

Nand 和 Samir[1]给出了上述模型的 Bayes 分析方法，但只考虑了定数截尾试验数据的情况，且只给出了参数的点估计。而在可靠性工程中，置信区间估计比点估计往往更具有意义。所以本文在考虑定时和定数两种截尾试验数据的情况下，就 p 已知的情况对上述模型作出分析，并最终给出了可靠性参数的 Bayes 点估计和置信下限估计。

1 模型分析及标记

(1) 对于上述 (1) 式中所描述的混合指数分布模型，其平均寿命和可靠性函数可分别表示为

$$\mu = [p\theta_1 + (1-p)\theta_2] \tag{2}$$

$$R \equiv R(t) = [p\exp(-t/\theta_1) + (1-p)\exp(-t/\theta_2)], t > 0 \tag{3}$$

(2) 针对模型 (1) 本文考虑如下两种常见的试验抽样方案。

a) 定数截尾试验 (n，无，时)：当进行到有 r 个单元失效时，试验结束。得失效时间 t_1，t_2，…，t_r 及 $n-r$ 个未失效单元，其总试验时间为 $T=\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)\ t_r$.

b) 定时截尾试验 (n，无，数)：在 $t=t_s$ 时，试验结束。假设有 r 个单元失效，其失效时间为 t_1，t_2，…，t_r，另有 $n-r$ 个单元未失效，则总试验时间为 $T=\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)\ t_s$.

---

* 国家部委基金资助

1998年6月15日收稿

第一作者：李 荣，男，1971年生，博士生

(3) 在后面的计算和推导中，我们需要以下几个结果

a) $$\int_0^{\infty} y^{-A}\exp(-B/y)\,\mathrm{d}y = \Gamma(A-1)/B^{A-1}, A>1, B>0 \tag{4}$$

b) 对任意 $b>0$

$$\prod_{i=1}^{r}\{1+b\exp[-t_i(1/\theta_2-1/\theta_1)]\} = 1+\sum_{l=1}^{r} b^{l}\sum^{(l)}\exp[-(1/\theta_2-1/\theta_1)]\sum_{s=1}^{l} t_{i_s} \tag{5}$$

其中 $$\sum^{(l)} \equiv \sum_{i_1=1}^{r}\sum_{i_2=1}^{r}\cdots\sum_{i_l=1}^{r},\quad i_1<i_2<\cdots<i_l \tag{6}$$

(4) 为统一试验数据的形式，考虑如下的统计量

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} t_r + (n-r)\bar{t} \tag{7}$$

其中当试验数据为定数截尾（或者定时截尾）试验数据时，$\bar{t}=t_r$（或者 $\bar{t}=t_s$）。同时为方便后面计算式的表达，定义如下几个中间统计量

$$U_k = (T_r - k\bar{t}) \tag{8}$$

$$V_{k,l} = U_k - \sum_{s=1}^{l} t_{i_s} \tag{9}$$

$$W_{k,l} = \sum_{s=1}^{l} t_{i_s} + k\bar{t} \tag{10}$$

2　参数的 Bayes 验后分布

首先假设 θ_i $(i=1, 2)$ 服从逆 gamma 验前分布 IGamma (a_i, b_i)，且考虑 θ_1 和 θ_2 是验前相互独立的，则有联合验前概率密度函数

$$\pi(\theta_1,\theta_2) \propto \left[\prod_{i=1}^{2}\theta_i^{(-a_i+1)}\right]\exp\left[-\sum_{i=1}^{2}(b_i/\theta_i)\right] \tag{11}$$

其中 $0<\theta_1, \theta_2<\infty$，$a_1, a_2, b_1, b_2>0$.

同时，由给定的试验数据，我们很容易得到如下的似然函数

$$\begin{aligned} l(T/\theta_1,\theta_2) &= \prod_{i=1}^{r} f(t_i/\theta_1,\theta_2)\,[p\exp(-\bar{t}/\theta_1)+(1-p)\exp(-\bar{t}/\theta_2)]^{n-r} \\ &= [p^{n}\exp(-T_r/\theta_1)/\theta_1]\,\left\{\prod_{i=1}^{r}[1+(1-p)/p\,(\theta_1/\theta_2)\,\exp(-t_i(1/\theta_2-1/\theta_1))]\right\} \\ &\quad [1+(1-p)/p\,\exp(-\bar{t}(1/\theta_2-1/\theta_1))]^{n-r} \end{aligned} \tag{12}$$

对上式的最后一个因子进行二项式展开并运用 (5) 式可得

$$\begin{aligned} l(T/\theta_1,\theta_2) &= \sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k} p^{n-k}(1-p)^{k}\,\Big[\theta_1^{-r}\exp(-U_k/\theta_1-k\bar{t}/\theta_2) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{r}\sum^{(l)}((1-p)/p)^{l}\theta_1^{-(r-l)}\theta_2^{-l}\exp(-V_{k,l}/\theta_1-W_{k,l}/\theta_2)\Big] \end{aligned} \tag{13}$$

进而由 (11) 及 (13) 式根据 Bayes 定理得 θ_1 和 θ_2 的验后联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1,\theta_2/T) &= C_1^{-1}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k} P^{n-k}(1-p)^{k} \\ &\quad \Big[\theta_1^{-(r+a_1+1)}\exp-(U_k+b_1)/\theta_1)\quad \theta_2^{-(a_2+1)}\exp(-(k\bar{t}+b_2)/\theta_2) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{r}\sum^{(l)}((1-p)/p)^{l}\theta_1^{-(l+a_1+1)}\theta_2^{-(l+a_2+1)}\exp(-(V_{k,l}+b_1)/\theta_1-(W_{k,l}+b_2)/\theta_2)\Big] \end{aligned} \tag{14}$$

其中 C_1 为一常量，它的引入是为了使得验后分布归一化。

3 可靠性参数的 Bayes 估计

考虑平方误差损失函数的情况, 我们需要得到 θ_1, θ_2, μ 和 R 的估计及其验后方差 V_1, V_2, V_μ, V_R。现注意如下积分

$$I(s_1, s_2, m_1, m_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty \theta_1^{s_1}\theta_2^{s_2}\exp[-t(m_1/\theta_1 + m_2/\theta_2)]\quad C_1\pi(\theta_1, \theta_2/T)\,\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \tag{15}$$

我们将 (14) 式代入 (15) 式并运用 (4) 式的积分可以得到

$$\begin{aligned} I(s_1, s_2, m_1, m_2) = & \sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k}P^{n-k}(1-p)^k\left[\frac{\Gamma(r+a_1-s_1)}{(U_k+b_1+m_1t)^{r+a_1-s_1}}\quad\frac{\Gamma(a_2-s_2)}{(k\bar{t}+b_2+m_2t)^{a_2-s_2}}\right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{r}\sum^{(l)}\left(\frac{1-P}{P}\right)^l\quad\frac{\Gamma(r-l-s_1+a_1)}{(V_{k,l}+b_1+m_1t)^{r-l-s_1+a_1}}\quad\frac{\Gamma(l-s_2+a_2)}{(W_{k,l}+b_2+m_2t)^{l-s_2+a_2}}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

这样由上式我们可以得到前面所提到的各参数的估计及其方差为

$$\begin{aligned} & C_1 = I(0,0,0,0),\ \hat{\theta}_1 = C_1^{-1}I(1,0,0,0),\ \hat{\theta}_2 = C_1^{-1}I(0,1,0,0), \\ & \hat{\mu} = C_1^{-1}[pI(1,0,0,0) + (1-p)I(0,1,0,0)] \\ & \hat{R} = C_1^{-1}[pI(0,0,1,0) + (1-p)I(0,0,0,1)] \\ & V_1 = C_1^{-1}I(2,0,0,0) - \hat{\theta}_1^2,\ V_2 = C_1^{-1}I(0,2,0,0) - \hat{\theta}_2^2 \\ & V_\mu = C_1^{-1}[p^2I(2,0,0,0) + 2p(1-p)I(1,1,0,0) + (1-p)^2I(0,2,0,0)] - \hat{\mu}^2 \\ & V_R = C_1^{-1}[p^2I(0,0,2,0) + 2p(1-p)I(0,0,1,1) + (1-p)^2I(0,0,0,2)] - \hat{R}^2 \end{aligned} \tag{17}$$

4 可靠性函数的 Bayes 置信下限估计

4.1 可靠性函数的矩

由于 (14) 式的 θ_1 和 θ_2 的联合概率密度函数较为复杂, 因此很难通过变量的转换得出可靠性函数 R 的边缘分布的解析形式, 所以也就不能直接求出可靠性函数的置信下限估计。然而由 (17) 式可以求得可靠性函数 R 的前 K 阶原点矩 R_k, $k=1, 2, \cdots, K$:

$$R_k = \int_0^\infty\int_0^\infty R(\theta_1, \theta_2, t)\,\pi(\theta_1, \theta_2/T)\,\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \tag{18}$$

将 (3) 式代入上式并进行二项式展开得

$$R_k = \int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}p^l(1-p)^{k-l}\exp[-t(l/\theta_1 + (k-l)/\theta_2)]\,\pi(\theta_1, \theta_2/T)\,\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \tag{19}$$

与 (15) 式对照便可得

$$R_k = C_1^{-1}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}p^l(1-p)^{k-l}I(0,0,l,k-l) \tag{20}$$

由于 R 的分布形式未知, 所以我们考虑根据 R 的前 k 阶矩, 并运用最大熵准则来求取 R 的分布。

4.2 最大熵方法

早在50年代, Jaynes 就提出了关于信息理论的 Jaynes 原理[2]: 在满足已知信息约束条件下, 通过最大化熵得到的分布是含有最少主观偏见的概率分布, 是最合理的分布。

对于一连续随机变量, 其熵定义为

$$S = -\int_R \pi(x)\ln\pi(x)\,\mathrm{d}x$$

这里 $\pi(x)$ 为概率密度函数。

Siddall[3] 指出: 当没有足够的信息可以确定某一密度函数的解析形式或在给定的信息下其解析形式难以求解时, 就可以利用该未知分布的已知矩, 运用 Jaynes 原理进行求解。这样, 在满足已知矩约束条件下, 通过最大化熵得到的密度函数是被求解的密度函数的最小偏差估计。

考虑连续随机变量的情况, 最大熵方法表示如下:

最大化

$$S = - \int_R \pi(x) \ln \pi(x) \mathrm{d}x \tag{21}$$

满足约束条件

$$\int_R \pi(x) \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_R x^i \pi(x) \mathrm{d}x = m_i, i = 1, \cdots, K \tag{22}$$

其中K 为密度函数$\pi(x)$ 的已知矩的个数，m_i 为第i 阶矩。

上式的求解实际上是一个有约束条件的非线性规划问题，采用相应的数值最优化技术，可以得到一个$\pi(x)$ 的离散解。然而Siddall[3] 认为绝大多数概率密度函数本质上都可以用如下的特定的解析形式来逼近

$$\pi(x) = \exp(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i x^i) \tag{23}$$

运用以上最优化方法就可以求得λ_i，$i= 0, \cdots, K$ 的值，从而也得到了$\pi(x)$ 的估计。

假设已由上述方法求得可靠性函数R 的密度函数的估计$\hat{\pi}(R)$，进而由下式就可以得到R 的置信度为$1-\alpha$的置信下限估计R_L。

$$\int_{R_L}^{1} \hat{\pi}(R) \mathrm{d}R = 1 - \alpha \tag{24}$$

参考文献

1 Singh N K, Bhattacharya S K. Bayesian analysis of the mixture of exponential failure distributions, Microeletron. Reliab. 1993, 33: 1113～1117

2 Jaynes E T. Information theory and statistics mechanics. Phys. Rev., 1957, 106: 620～630

3 Siddall J N. Probabilistic Engineering Design. Marcel Dekker, New York, 1992

(上接第99页)

3 结论

本文介绍的内容是我们近年来从事遗传算法和“面向控制”模型建模研究的小结。本方法在时域进行，无需把测量数据转换到频域。还把当前两个热点研究领域（面向控制模型的建模、遗传算法计算）有机地结合到一起来。

根据上述建模的实现方法，我们进行了大量的仿真计算，表明真实模型完全处于辨识出模型集中，模型偏差硬边界小于0.15 $\|M\|_\infty$. 因此辨识算法鲁棒性好，适用于鲁棒控制系统设计。

参 考 文 献

1 Helmicki A J, Jacobson C A, Nett C N. Control-oriented system identification: A worst-case/deterministic approach in H∞. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36 (8): 1163～1176

2 Gu G, Khargonekar P P. Linear and Nonlinear Algorithms for Identification in H∞ with Error Bounds. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37 (7): 953～963

3 Kosut R L, Lau M K, Boyd S P. Set-Membership Identification of Systems with Parametric and Nonparametric Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37 (7): 929～941

4 Smith R S, Doyle J C. Model Validation: A Connection between Robust Control and Identification. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37 (7): 942～952

5 Smith R G, Dullerud E. Continuous-Time Control Model Validation Using Finite Experimental Data. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, 41 (8): 1094～1105

6 陈国良, 王熙法, 庄镇泉, 王东生. 遗传算法及其应用. 北京: 人民邮电出版社, 1996