

奇异积分方程在裂纹板条动态断裂分析中的应用 (I)^{*}

袁杰红 唐国金 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 利用积分变换方法, 将含 Griffith 裂纹的无限长板条问题转化为 Laplace 变换域中一 Cauchy 型奇异积分方程。通过求解奇异积分方程和对裂纹尖端场的渐近分析, 获得了 Laplace 变换域中的动态应力强度因子。

关键词 动态断裂, 板条, Griffith 裂纹, 积分变换, 奇异积分方程, 应力强度因子

分类号 O34

The Application of Singular Integral Equation to the Dynamic Fracture Analysis of Cracked Strip (I)

Yuan Jiehong Tang Guojin Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract By using the integral transform method, the problem of an infinitely long elastic strip with a Griffith crack is converted into a Cauchy-type singular integral equation in Laplace transform domain. By solving the singular integral equation and analyzing the asymptotic behavior of the crack tip field, the dynamic stress intensity factor in Laplace transform domain is gotten.

Key words dynamic fracture, strip, Griffith crack, integral transform, singular integral equation, stress intensity factor

工程实际中存在着大量的动态断裂问题, 因此对其的研究已成为不可避免的事实。动态断裂分析中, 由于要考虑应力波与裂纹尖端的相互作用, 因此, 所得动态应力强度因子的变化将是非常复杂的, 这样, 使得其和静态断裂分析有本质的不同。

动态断裂分析常采用数值和解析分析两类主要方法。数值方法主要包括有限元法、有限差分法和边界数值方法。解析方法主要是积分方程方法, 包括 Copson-Sih 方法、COD 方法和奇异积分方程 (SIE) 方法三种基本方法。

Griffith 裂纹是形式最简单的裂纹, Chen^[1] 最早利用有限差分方法计算了在阶跃载荷作用下, 有限尺寸板中 Griffith 裂纹尖端的动态应力强度因子; Aberson^[2] 利用有限元法求解了 Chen^[1] 的问题, 并得出了一致的结论; 李玉龙^[3] 通过在裂尖采用畸变奇异等参元的有限元法, 对 Chen^[1] 的问题进行了进一步的计算和讨论, 得出了一些更加有益的结论。对无限平板中的 Griffith 裂纹, 利用解析方法处理最为方便, Sih^[4] 利用 Copson-Sih 方法求解了该问题在阶跃载荷作用下的动态应力强度因子, 由于该问题中没有应力波的反射, 因此, 导致 Sih^[4] 得出的结果与 Chen^[1] 的结果相差甚远。由于数学上的困难, 用解析方法求解 Chen^[1] 的问题目前尚不可能, 但对于无限长板条中的 Griffith 裂纹, 利用解析方法是可以达到求解目的的。由于板条在一个方向上的尺寸是有限的, 因此能体现应力波的反射及其与裂纹尖端的相互作用, 所以, 对该问题的求解具有理论价值和实用价值。范天佑^[5] 利用 Copson-Sih 方法, 计算了在阶跃载荷作用下, 无限长板条中一平行于板长方向的 Griffith 裂纹的动态应力强度因子。但遗憾的是, 文 [5] 中给出的结果未能全面体现应力波的反射及其与裂纹尖端的相互作用, 因而也没对结果

* 1998 年 10 月 12 日收稿

第一作者: 袁杰红, 男, 1965 年生, 博士生

作进一步的分析。

本文利用奇异积分方程方法, 对上述板条 Griffith 裂纹问题作进一步的分析 and 计算, 得到了 Laplace 变换域中的应力强度因子。

1 奇异积分方程的推导

1.1 基本控制方程

平面动态问题的基本控制方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

其中, φ 和 ψ 为 Lamé 势函数。 c_1 和 c_2 分别为 P 波和 S 波波速, 且 $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho, c_2^2 = \mu / \rho, \rho$ 为材料密度。 λ 为 Lamé 常数、 μ 为剪切弹性模量, 且 $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - \nu)$ (平面应力), $\mu = E / 2(1 + \nu), \nu, E$ 分别为材料的泊松比和弹性模量。

1.2 边界条件

如图 (1) 所示, 无限长板条中有一平行于板长方向的 Griffith 裂纹, 裂纹处于对称位置, 裂纹长为 $2c_0$, 板宽为 $2h$ 。裂纹面上均匀作用一阶跃载荷 $-\sigma_0 H(t)$ 。则在时间 $t > 0$ 时, 有如下边界条件

- a、 x 时, φ 和 ψ 为有界函数;
- b、 应力边界条件

$$\begin{cases} \sigma_{xy}(x, 0, t) = 0 \\ \sigma_{xy}(x, \pm h, t) = 0 \\ \sigma_{yy}(x, \pm h, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- c、 混合边界条件

$$\begin{cases} \sigma_y(x, 0, t) = -\sigma_0 H(t) & x < c_0 \\ v(x, 0, t) = 0 & x > c_0 \end{cases} \quad (3)$$

这是一个混合边值问题, 即在上述边界条件下求方程 (1) 的解。根据 Buckner 等效原则, 所得的解既适用于裂纹面上受突加载荷的问题, 又适用于上述板条自由表面上受突加载荷的问题, 同时还适用于两自由面均匀受拉而板条中突然出现一个裂纹的问题。

1.3 奇异积分方程的推导

对基本控制方程 (1) 作关于时间变量 t 的 Laplace 变换并考虑零初始条件, 得

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = \alpha^2 \Phi \\ \nabla^2 \Psi = \alpha^2 \Psi \end{cases} \quad (4)$$

式中, “*” 代表 Laplace 变换, $\alpha = p/c_i (i = 1, 2), p$ 为 Laplace 变换参数。

对 (4) 式作关于变量 x 的 Fourier 变换, 并定义位错密度函数 $\mu^*(x, p) = \partial^*(x, 0^+, p) / \partial x$, 通过代入 Laplace 变换后的边界条件, 即可得出一无量纲形式的 Cauchy 型奇异积分方程。

$$\frac{\mu}{\pi \alpha^2} \int_{-1}^1 \left\{ 2(\bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_1^2) \left[\frac{1}{\bar{u} - \bar{x}} + k_1(\bar{u}, \bar{x}, p) \right] + k_2(\bar{u}, \bar{x}, p) + 2[k_3(\bar{u}, \bar{x}, p) + k_4(\bar{u}, \bar{x}, p)] \right\} \mu^*(\bar{u}, p) d\bar{u} = -\frac{\sigma_0}{p} \quad (5)$$

式中

$$\bar{x} = x/c_0, \bar{u} = u/c_0, \bar{h} = h/c_0, v^*(\bar{x}, p) = v^*(x, p)/c_0$$

$$\bar{s} = s/c_0, \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 c_0, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 c_0$$

$$\bar{Y}_1 = Y_1 c_0, \bar{Y}_2 = Y_2 c_0, \mu^*(\bar{u}, p) = \mu^*(u, p)$$

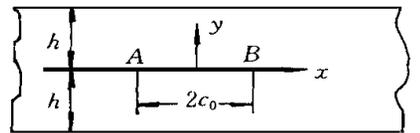


图 1 无限长板条中的 Griffith 裂纹
Fig. 1 A Griffith crack in an infinite strip

$$\begin{cases} k_1(\bar{u}, \bar{x}, p) = \int_0^{\bar{s}} \left[\frac{2\bar{s}}{\mathcal{Y}_1} - \frac{2\bar{s}}{\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2} - 1 \right] \sin[(\bar{u} - \bar{x})\bar{s}] d\bar{s} \\ k_2(\bar{u}, \bar{x}, p) = \int_0^{\bar{s}} \frac{\bar{\alpha}_2}{s\mathcal{Y}_1} \sin[(\bar{u} - \bar{x})\bar{s}] d\bar{s} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} k_3(\bar{u}, \bar{x}, p) = - \int_0^{\bar{s}} \left[\frac{4s\mathcal{Y}_2^2}{\mathcal{Y}_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{s\mathcal{Y}_1} \right] \Delta_1 s \sin[(\bar{u} - \bar{x})\bar{s}] d\bar{s} \\ k_4(\bar{u}, \bar{x}, p) = - \int_0^{\bar{s}} \frac{2}{s\mathcal{Y}_1} \Delta_2 s \sin[(\bar{u} - \bar{x})\bar{s}] d\bar{s} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{2s^2\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 \left[e^{-2(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}} + \frac{\bar{a}_1}{a_2} e^{-2\mathcal{Y}_2\bar{h}} \right] + \frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{a_2} e^{-(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}}}{1 - \frac{\bar{a}_1}{a_2} \left[e^{-2\mathcal{Y}_2\bar{h}} - e^{-2\mathcal{Y}_1\bar{h}} \right] - e^{-2(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}}} \\ \Delta_2 = \frac{\frac{2s^2\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2}{a_2} e^{-(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}} + e^{-2(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}} - \frac{\bar{a}_1}{a_2} e^{-2\mathcal{Y}_1\bar{h}}}{\frac{\bar{a}_1}{a_2} \left[e^{-2\mathcal{Y}_2\bar{h}} - e^{-2\mathcal{Y}_1\bar{h}} \right] - 1 + e^{-2(\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1)\bar{h}}} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \frac{1}{4} (2s^2 + \bar{\alpha}_2)^2 + s^2\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 \\ \bar{a}_2 = \frac{1}{4} (2s^2 + \bar{\alpha}_2)^2 - s^2\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 \end{cases} \quad (9)$$

$\mathcal{Y}_i^2 = s^2 + \alpha_i^2 (i = 1, 2)$, s 为 Fourier 变换参数。

奇异积分方程 (5) 描述了所讨论的板条 Griffith 裂纹问题, 具有明确的物理意义: 积分核的奇异部分 (第一项) 表示了裂纹尖端的奇异特性, 与静态问题相同。积分核的非奇异部分则反映了波动的影响, 其中, 第四、五项体现了几何尺寸的影响。对奇异积分方程 (5) 可采用 Gauss-Chebyshev 方法^[6] 进行数值求解。

2 动态应力强度因子的推导

假设在动态情形, 裂纹尖端应力仍然具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶奇异性。那么, 动态应力强度因子的定义仍然可以采用静态应力强度因子相似的定义。对于图 1 所示的无限长板条, 显然两个裂纹尖端的应力强度因子都是相同的。若以尖端 B 作为研究对象, 则其 I 型动态应力强度因子为

$$K(t) = \lim_{x \rightarrow c_0} \overline{2\pi(x - c_0)\sigma_{yy}(x, 0, t)} \quad (10)$$

由于前述讨论均是在 Laplace 变换域中进行的, 所以, 下列推导也转换到 Laplace 变换域中进行。对 (10) 式作关于时间 t 的 Laplace 变换, 得

$$K^*(p) = \lim_{x \rightarrow c_0} \overline{2\pi(x - c_0)\sigma_{yy}^*(x, 0, p)} \quad (11)$$

作用在裂纹面上的无量纲应力表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^*(\bar{x}, 0, p) = \frac{\mu}{\pi\bar{\alpha}_2} \int_{-1}^1 \left\{ 2(\bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_1^2) \left[\frac{1}{\bar{u} - \bar{x}} + k_1(\bar{u}, \bar{x}, p) \right] \right. \\ \left. + k_2(\bar{u}, \bar{x}, p) + 2[k_3(\bar{u}, \bar{x}, p) + k_4(\bar{u}, \bar{x}, p)] \right\} \mu^*(\bar{u}, p) d\bar{u} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} \mu^*(\bar{u}, p) = (1 - \bar{u}^2)^{-\frac{1}{2}} g^*(\bar{u}, p) \\ g^*(\bar{u}, p) = \int_0^1 A_n(p) T_n(\bar{u}) \end{cases} \quad (13)$$

其中, $T_n(\bar{u})$ 为第一类 Chebyshev 多项式。

将 (13) 代入 (12), 并对所得表达式作有关渐近分析^[7], 可得到裂纹尖端应力的奇异部分表达式, 将该表达式代入式 (11), 得到裂纹尖端动态应力强度因子在 Laplace 变换域中的表达式为

$$K^*(p) = -m \pi c_0 g^*(1, p) \quad (14)$$

其中, $m = 2\mu(1 - \bar{\alpha}_i/\bar{\alpha}_e)$, $g^*(1, p)$ 通过对积分方程 (5) 式求解获得。

3 结论

(1) 与 Copson-Sih 方法相比, 本文的奇异积分方程方法不仅推导方便, 而且核函数形式简单, 有利于数值计算。同时, 所得出的积分方程物理意义明确。

(2) 与数值方法相比, 本文的解析推导方法编程简单, 计算省时, 工程适应性强。

参考文献

- 1 Chen Y M. Numerical computation of dynamic stress-intensity factors by a Lagrangian finite-difference method, *Eng. Fract. Mech.* 1975, 7: 635
- 2 Aberson J A etc. Elastodynamic crack problems. *Mech. of Fract.* 1977, 4
- 3 李玉龙等. 带裂纹板在冲击载荷下动态应力强度因子的计算. 第五届全国断裂学术会议论文集. 1988, 1: 456
- 4 Sih G C, Embley G T. Impact response of a finite crack in plane extension. *Int. J. Solids Structures.* 1972, 8: 977
- 5 范天佑. 断裂动力学引论. 北京理工大学出版社, 1990
- 6 Erdogan F. 复变函数技术. 程沅生译, 南京: 江苏科学出版社, 1982
- 7 Delale F, Erdogan F. The problem of internal and edge cracks in an orthotropic strip. *J. Appl. Mech.* 1977, 237