微分方程的有界性与概周期解的存在性*

李志祥 唐扬斌

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文考虑高维非自治概周期系统 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$，利用对 x 的分量分组构造 Liapunov 函数的方法讨论了其概周期解的存在性。所得结果去掉了文献中系统存在有界解的假设，得到了比较明显的改进。

关键词 Liapunov 函数，概周期，一致有界，一致最终有界

分类号 O17

On Boundedness of Solutions and Existence of Almost Periodic Solution of Differential Equation

Li Zhixiang Tang Yangbin

(Department of System Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we consider a higher dimensional nonautonomous almost periodic system $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$. By constructing Liapunov functions to groups of quantities of vector x, we diminish the assumption of existence of bounded solution and improve the results in the documents.

Key words Liapunov function, almost periodic, uniform boundedness, uniformly ultimate boundedness

本文考虑下列一致概周期的常微分系统

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

其中，$x\in\mathbf{R}^n, t\in I=[0,\infty], f\in C(I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$。

众所周知，解的有界性、稳定性与周期解、概周期解的存在性有着密切的联系：一般而言，周期系统解的有界性和最终有界性蕴涵周期解的存在性[1]；但对概周期系统，情况则完全不同了，正如文[2, 3]所指出的那样，概周期系统解的有界性与一致最终有界性并不蕴涵着概周期解的存在性。因此，“在讨论概周期解的存在性时，往往假定了有界解的某种稳定性”，然后利用定正且导数定负的 Liapunov 函数保证该有界解是渐近概周期函数，从而由 Coppel 定理[1]得出概周期解的存在性；类似的条件还被用于得到周期解的存在性[1]。

在利用 Liapunov 方法判定周期解与概周期解的存在性时，需要对其的乘积系统构造 V 函数（泛函），因此应用沿着 Barbashin- Krasovskii 定理的思路降低对 V 函数（泛函）的要求，从而减小对系统本身的限制的研究课题[4]就显得更为重要了。文[4]之定理1是一个较广泛的结果，但由于事先假定了有界解的存在性且涉及解的性态的条件，故在实际应用时较为困难。文[5]对周期系统得到周期解的存在性，且不事先假定有界解的存在性，但该文在初值问题解的唯一性条件下利用了压缩映像原理，应用不适用于概周期系统。

为了得到系统（1）的概周期解，我们讨论其伴随系统

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad \frac{dy}{dt}=f(t,y) \tag{2}$$

这里t，x，f 的定义同前，$y\in\mathbf{R}^n$.

以往在构造 Liapunov 函数时，总是把 $x(t)$ 的所有分量集中在一个 V 函数内，然后要求 V 沿系

* 1999年1月20日收稿
第一作者：李志祥，男，1957年生，教师

统解的导数满足一定的条件．由于 $x(t)$ 的各分量之间的直接联系一般无法知道，从而使得所需的 V 函数往往不易构造．为了解决这一问题，我们将 x 各的分量分成 l $(1\leq l\leq n)$ 组，对各组分别建立相应的 Liapunov 函数 V_i $(i=1,\cdots,l)$．通过利用 $V_i>\max\{V_j\ j=1,\cdots,l,\ j\neq i\}$ 时，V_i 沿系统解的导数所满足的一定条件，给出相应的系统 (1) 的解一致有界和一致最终有界的判定定理，降低构造 V 函数的难度。

为了表达方便，我们引入下列记号

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\qquad x=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$0=m_0<m_1<\cdots<m_l=n,\quad(m_i\in 1,2,\cdots,n);$$

$$J=\{1,2,\cdots,l\},\qquad J(i)=\{j\in J:j\neq i\};$$

$$X_i=(x_{m_{i-1}+1},\cdots,x_{m_i})^{\mathrm{T}},\qquad Y_i=(y_{m_{i-1}+1},\cdots,y_{m_i})^{\mathrm{T}};$$

$$X_i=\Big(\sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i}x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}},\qquad Y_i=\Big(\sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i}y_j^2\Big)^{\frac{1}{2}};$$

$$F_i=(f_{m_{i-1}+1},\cdots,f_{m_i})^{\mathrm{T}}.$$

定理1 设对任意 $i\in\boldsymbol{J}$，存在定义在 I，X_i，$Y_i\in\mathbf{R}^{m_i-m_{i-1}}$上的Liapunov 函数 $V_i(t,X_i,Y_i)$，使对任意X_i，X_i'，Y_i，$Y_i'\in\mathbf{R}^{m_i-m_{i-1}}$满足:

(i) $a_i(X_i-Y_i)\leq V_i(t,X_i,Y_i)\leq b_i(X_i-Y_i)$，其中$a_i(r)$、$b_i(r)$ 均为严格单调递增的正定连续函数，$a_i(0)=b_i(0)=0$，$X_i=(x_{m_{i-1}}^2+\cdots+x_{m_i}^2)^{\frac{1}{2}}$；

(ii) $V_i(t,X_i,Y_i)-V_i(t,X_i',Y_i')\leq K\{X_i-X_i'+Y_i-Y_i'\}$，其中 $K\geq 0$为常数;

(iii) 存在 $\alpha>0$，使若 $V_i(t,X_i,Y_i)\geq\max\limits_{j\in J(i)}\{V_j(t,X_j,Y_j)\}$，则有

$$V_{i(2)}'(t,X_i,Y_i)\leq-\alpha V_i(t,X_i,Y_i).$$

则系统 (1) 的解一致有界且一致最终有界.

证明 设$\phi(t)$ 是 (1) 的任一解，记 $\Phi=(\phi_{m_{i-1}+1},\cdots,\phi_{m_i})^{\mathrm{T}}$．令 $W_i(t)=V_i(t,\Phi(t),0)$，$i\in J$．考虑对 I 进行如下的分划

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<+\infty$$

并从J 中取数构造数列 $\{i_s\}$，使对任意 $s\geq 1$，$i_s\neq i_{s-1}$，且当 $t\in[t_{s-1},t_s]$ 时，$W_{i_s}=\max\limits_{j\in J}\{W_j\}$.

首先证明 (1) 的解一致有界.

对任意 $t\in I$，设 $t\in[t_{s-1},t_s)$，记 $(x(\ )(t,\phi(t)),\ y(\ )(t,0))$ 为 (2) 的过 $(t,\phi,0)$ 的任一解，则由条件 (ii) (iii) 有

$$\begin{aligned}
W_{i_s}'(t)&=\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}[V_{i_s}(t+h,\Phi_{i_s}(t+h),0)-V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),0)]\\
&\leq V_{i_s(2)}'(t,X_{i_s}(t),0)+\overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\ V_{i_s}(t+h,X_{i_s}(t+h)(t,\phi(t)),Y_{i_s}(t+h)(t,0))-V_{i_s}(t+h,\Phi_{i_s}(t+h),0)\\
&\leq-\alpha V_{i_s}(t,X_{i_s}(t),0)+K\ \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left|\int_t^{t+h}f_{i_s}(\theta,y(\theta)(t,0))d\theta\right|\\
&+K\ \overline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\left|\int^{h}[f_{i_s}(\theta,x(\theta)(t,\phi(t)))-f_{i_s}(\theta,\phi(\theta))]d\theta\right|\\
&\leq-\alpha W_{i_s}(t)+KA,
\end{aligned}$$

对上式在 $[t_{s-1},t)$ 上积分可得

$$W_{i_s}(t)\leq e^{-\alpha(t-t_{s-1})}W_{i_s}(t_{s-1})+\frac{KA}{\alpha}(1-e^{-\alpha(t-t_{s-1})}).$$

类似地，在 $[t_{s-2},t_{s-1})$ 上可得

$$W_{i_{s-1}}(t_{s-1})\leq e^{-\alpha(t_{s-1}-t_{s-2})}W_{i_{s-1}}(t_{s-2})+\frac{KA}{\alpha}(1-e^{-\alpha(t_{s-1}-t_{s-2})}).$$

注意到 $W_{i_s}(t_{s-1})=W_{i_{s-1}}(t_{s-1})$，故由以上两式可得

$$W_{i_s}(t) \leq e^{-\alpha(t-t_{s-2})} W_{i_{s-1}}(t_{s-2}) + \frac{KA}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_{s-2})}).$$

如此递推，最终可得

$$W_{i_s}(t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} W_{i_1}(t_0) + \frac{KA}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}).$$

令 $W(t) = \max_{i \in J}\{W_i(t)\}$，则有

$$W(t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} W(t_0) + \frac{KA}{\alpha}(1 - e^{-\alpha}) \leq W(t_0) + \frac{KA}{\alpha}.$$

也即

$$V_{i_s}(t, \Phi_{i_s}(t), 0) \leq V_{i_1}(t_0, \Phi_{i_1}(t_0), 0) + \frac{KA}{\alpha}.$$

由条件 (i)，可得

$$a_{i_s}(\|\Phi_{i_s}(t)\|) \leq b_{i_1}(\|\Phi_{i_1}(t_0)\|) + \frac{KA}{\alpha}.$$

对任意正数 $B_1 > 0$，若令 $\|\phi(t_0)\| \leq B_1$，则对任意 $j \in J$ 有 $\|\Phi_j(t_0)\| \leq B_1$. 取 $\bar{B} = \max_{j \in J}\{b_j(B_1)\}$，则

$$a_j(\|\Phi_j(t)\|) \leq \bar{B} + \frac{KA}{\alpha},$$

于是

$$\|\Phi_j(t)\| \leq a_j^{-1}(\bar{B} + \frac{KA}{\alpha}).$$

从而对任意 $t \geq t_0$，

$$\|\phi(t)\| \leq B := \left\{\sum_{i=1}^{l}[a_i^{-1}(\bar{B} + \frac{KA}{\alpha})]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

又取 $B^* = \left\{\sum_{i=1}^{l}[a_i^{-1}(1 + \frac{KA}{\alpha})]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$，对任意 $t_0 > 0$ 与 $B_2 > 0$，若 $\|\phi(t_0)\| \leq B_2$. 令 $\bar{B} = \max_{j \in J}\{b_j(B_2)\}, T = \frac{\ln \bar{B}}{\alpha}$，则与以上类似可得，当 $t \geq t_0 + T$ 时，

$$\begin{aligned} W(t) &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} W(t_0) + \frac{KA}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \\ &\leq e^{-\alpha(t-t_0)}\bar{B} + \frac{KA}{\alpha} \leq 1 + \frac{KA}{\alpha}. \end{aligned}$$

从面 $\|\phi(t)\| \leq B^*$.

注意到以上 T 的取法只与 B 有关，故由上式可知 (1) 的解是一致最终有界的。证毕。

定理2 在定理2的条件下，系统 (1) 有唯一的渐近稳定的概周期解 $p(t)$，且 $\mathrm{mod}(p) \subset \mathrm{mod}(f)$. 又若 (1) 为以 T 为周期的周期系统，则它有唯一的渐近稳定的 $T-$ 周期解.

证明 以下沿用定理2中的记号. 不妨令 $t_0 = 0$.

取 $\phi(t)$ 为系统 (1) 的任一解，则 $\|\phi(t)\| \leq \boldsymbol{B}$，$t \in \boldsymbol{I}$. 任意 $i \in \boldsymbol{J}$，记 $\Phi_i(t) = (\phi_{m_{i-1}+1}(t), \cdots, \phi_{m_i}(t))^T$. 设 $\{\tau_k\}$ 为一单调递增的正数序列，使当 $k \to \infty$ 时，$\tau_k \to \infty$. 令 $\psi_k(t) = \phi(t + \tau_k)$，则 $\psi_k(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t + \tau_k, x)$$

的过 $(0, \phi(\tau_k))$ 的解. 因为 $f(t, x)$ 在 $t \in I \times S_B$，$S_B = \{x \in \mathbf{R}^n: \|x\| \leq B\}$ 上关于 t 对 x 是一致概周期的，故必存在 $\{\tau_k\}$ 的子列，不妨仍记为 $\{\tau_k\}$，使当 $k \to \infty$ 时，$f(t + \tau_k, x)$ 在 $I \times \bar{S}_B$ 上一致收敛.

任意 $\epsilon > 0$，令 $a(\epsilon) = \min_{i \in J}\{a_i(\epsilon)\}$. 取 $k_0(\epsilon)$ 为充分大的整数，使当 $m \geq k \geq k_0(\epsilon)$ 时，有

$$\max_{i \in J} b_i(2B) e^{-\alpha\tau_k} < \frac{a(\epsilon)}{2}$$

且在$\boldsymbol{R}\times\overline{S_B}$上，对任意$i\in J$，

$$f_i(t+\tau_k,x)-f_i(t+\tau_m,x) < \frac{\alpha a(\epsilon)}{2K}.$$

与定理2类似地对I作如下分划

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots,$$

并从J中取数构造数列$\{i_s\}$，使对任意$s\leq 1$，$i_s\neq i_{s-1}$，且当$t\in[t_{s-1},t_s]$时，有

$$V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))=\max_{i\in J}\{V_j(t,\Phi_j(t),\Phi_j(t+\tau_m-\tau_k))\}.$$

对任意$t\in I$，设$t\in[t_{s-1},t_s)$，记$(x(\ )(t,\phi(t)),y(\ )(t,\phi(t+\tau_m-\tau_k)))$为(2)的过$(t,\phi(t),\phi(t+\tau_m-\tau_k))$的任一解，则

$$\frac{\mathrm{d}V_{i_s}}{\mathrm{d}t}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))$$

$$=\overline{\lim_{h\to0+}}\frac{1}{h}[V_{i_s}(t+h,\Phi_{i_s}(t+h),\Phi_{i_s}(t+h+\tau_m-\tau_k))-V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi i_s(t+\tau_m-\tau_k))]$$

$$\leq V'_{i_{s(2)}}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))+\overline{\lim_{h\to0+}}\frac{1}{h}\ V_{i_s}(t+h,X_{i_s}(t+h)(t,\phi(t)),$$

$$Y_{i_s}(t+h)(t,\phi(t+\tau_m-\tau_k)))$$

$$-V_{i_s}(t+h,\Phi_{i_s}(t+h),\Phi i_s(t+h+\tau_m-\tau_k))$$

$$\leq-\alpha V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))+K\overline{\lim_{h\to0+}}\frac{1}{h}\{X_{i_s}(t+h)(t,\phi(t))-\Phi_{i_s}(t+h)$$

$$+Y_{i_s}(t+h)(t,\phi(t+\tau_m-\tau_k))-\Phi_{i_s}(t+h+\tau_m-\tau_k)\}$$

$$\leq-\alpha V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))+\frac{\alpha a(\epsilon)}{2}$$

从而由比较原理可得，对任意$t\in[t_{s-1},t_s)$

$$V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))$$

$$\leq e^{-\alpha(t-t_{s-1})}V_{i_s}(t_{s-1},\Phi_{i_s}(t_{s-1}),\Phi_{i_s},(t_{s-1}+\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha(t-t_{s-1})}].$$

而在$[t_{s-2},t_{s-1})$内，与此类似地可得

$$V_{i_{s-1}}(t_{s-1},\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-1}),\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-1}+\tau_m-\tau_k))$$

$$\leq e^{-\alpha(t_{s-1}-t_{s-2})}V_{i_{s-1}}(t_{s-2},\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-2}),\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-2}+\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha(t_{s-1}-t_{s-2})}].$$

注意到$V_{i_s}(t_{s-1},\Phi_{i_s}(t_{s-1}),\Phi_{i_s}(t_{s-1}+\tau_m-\tau_k))=V_{i_{s-1}}(t_{s-1}\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-1}),\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-1}+\tau_m-\tau_k))$，故由以上两式可得

$$V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))$$

$$\leq e^{-\alpha(t-t_{s-2})}V_{i_{s-1}}(t_{s-2},\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-2}),\Phi_{i_{s-1}}(t_{s-2}+\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha(t-t_{s-2})}].$$

如此递推，最后可得

$$V_{i_s}(t,\Phi_{i_s}(t),\Phi_{i_s}(t+\tau_m-\tau_k))\leq e^{-\alpha}V_{i_1}(0,\Phi_{i_1}(0),\Phi_{i_1}(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha}]$$

$$\leq e^{-\alpha}V_{i_1}(0,\Phi_{i_1}(0),\Phi_{i_1}(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}.$$

令$V(t,\phi(t),\phi(t+\tau_m-\tau_k))=\max_{j\in J}\{V_j(t,\Phi_j(t),\Phi_j(t+\tau_m-\tau_k))\}$. 则$V$是定义在$t\in I$上的一个分段可微连续函数. 由上式可得

$$V(t,\phi(t),\phi(t+\tau_m-\tau_k))\leq e^{-\alpha}V(0,\phi(0),\phi(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha}]$$

$$\leq e^{-\alpha}V(0,\phi(0),\phi(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}.$$

此式显然与 s 无关，故在其中用 $t+\tau_k$ 代 t 可得

$$V(t+\tau_k,\phi(t+\tau_k),\phi(t+\tau_m))\le e^{-\alpha+\tau_k}V(0,\phi(0),\phi(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}[1-e^{-\alpha+\tau_k}]$$

$$\le e^{-\alpha+\tau_k}V(0,\phi(0),\phi(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\epsilon)}{2}<\frac{a(\epsilon)}{2}+\frac{a(\epsilon)}{2}=a(\epsilon).$$

从而，只要 $m\ge k\ge k_0(\epsilon)$，就有

$$V(t+\tau_k,\phi(t+\tau_k),\phi(t+\tau_m))<a(\epsilon).$$

也即对任意 $i\in J$，有

$$V_i(t+\tau_k,\Phi_i(t+\tau_k),\Phi_i(t+\tau_m))<a_i(\epsilon).$$

由条件（i），对任意 $t\in I$，我们有

$$\Phi(t+\tau_k)-\Phi(t+\tau_m)<\epsilon,$$

于是

$$\phi(t+\tau_k)-\phi(t+\tau_m)<\overline{l}\epsilon.$$

这就表明 $\phi(t)$ 是渐近概周期的. 故由系统(1)有概周期解 $p(t)$，它以 B 为界. 利用前面定义的Liapunov函数 V，我们可以很容易地看出 $p(t)$ 是一致渐近稳定的，且每一个保持在 S_B 内的解当 $t\to\infty$ 时都趋近于 $p(t)$，这样就得到了 $p(t)$ 的唯一性.

余下的结论显然. 证毕.

参考文献

1 Yoshizawa 著. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性. 郑祖庥等译，南宁：广西人民出版社，1985

2 Opial Z. Sur une equantion differentielle presque- periodique sans solution presque- periodique. bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. phys., 1961, 9: 673～676.

3 Fink A M, Friderickson P O. Ultimate boundness does not imply almost periodicity. J. Differential Eqns., 1971, 9: 180～284.

4 李志祥. Liapunov 方法在概周期系统研究中的应用. 科学通报，1989，12：889～891.

5 李黎明. 高维非自治系统的平稳震荡. 应用数学学报，1989，2：198～204.