

高超音速粘性流场数值计算中 差分格式的对比分析*

李桦 王磊 王承尧

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 本文通过三维高超音速粘性流场的求解对三种常用的差分格式: Harten 的 TVD 格式、修正后的 Osher-Chakravartly 的 TVD 格式以及 Jameson 的当地极值递减 (LED) 格式对激波的分辨率、边界层计算的准确性和格式的计算效率等三个方面进行了较细致的对比分析, 为三维高超音速复杂流场的数值模拟打下基础。

关键词 三维高超音速流场, 差分格式, 数值模拟

分类号 V211.4

An Investigation of Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Viscous Flowfield

Li Hua Wang Lei Wang Chengyao

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the time-dependent numerical method has been used to solve the three dimensional Navier-Stokes equation, the numerical procedure uses Roe's flux difference splitting technique and TVD scheme or LED scheme for the convective terms and central differencing scheme for viscous terms. Numerical solution of hypersonic laminar flow over a blunt biconic with attack angle is obtained. The resolution of shock, computational accuracy of viscous boundary layer and the efficiency of three schemes: Osher-Chakravartly's TVD scheme, Harten's TVD scheme and Jameson's LED scheme, are investigated and compared by the numerical calculation of three dimensional hypersonic viscous flow.

Key words three dimensional hypersonic viscous flow, TVD scheme, LED scheme, numerical simulation

高超音速流场有两个重要的特征。一是在流场中存在很强的激波。采用数值计算方法模拟高超音速复杂流场, 要求差分格式对激波具有较强的捕捉能力和较高的分辨率。另一个重要的特征是在边界层内有很强的气动加热。高超音速流场的模拟的成功与否, 在很大程度上取决于能否准确地模拟表面热流值, 这就要求差分格式能准确地模拟粘性边界层内的流动。

在三维高超音速流场中, 格式的计算效率也是一个重要的因素。因此, 在高超音速流场的数值计算中, 选择一个差分格式应从以下三个方面考虑: (1) 格式对激波的捕捉能力和分辨率; (2) 格式模拟粘性边界层的准确程度; (3) 格式的计算效率。

20 世纪 80 年代, Harten 创造了总变差递减 (TVD) 格式。由于 TVD 格式能够保持初始解的单调性, 抑制了激波振荡, 具有较高的分辨率。此后, Osher 等人又相继发展了一些具有二阶精度的 TVD 格式。近年来, Jameson 在 TVD 格式的基础上提出了当地极值递减 (LED) 格式的概念。这类格式是在中心格式的基础上, 加上人工耗散模型来捕捉激波, 消除振荡, 并能较好地模拟边界层流动。

1 数值方法及差分格式

为讨论问题方便, 考虑一维 NS 方程:

* 国家自然科学基金资助项目

1998 年 9 月 12 日收稿

第一作者: 李桦, 男, 1962 年生, 副教授

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi}$$

通过数值离散, 得到上述方程的离散形式^[4]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta \tau} + \frac{A_j^+ - A_j^-}{\Delta \xi} \right) \delta Q_j^{n+1} + \frac{A_{j+1}^-}{\Delta \xi} \delta Q_{j+1}^{n+1} - \frac{A_{j-1}^+}{\Delta \xi} \delta Q_{j-1}^{n+1} \\ & = \frac{1}{\Delta \xi} \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + R_j^n \end{aligned} \quad (1)$$

式中 R_j^n 是粘性余量, 采用中心差分格式计算; $H_{j+\frac{1}{2}}^n$ 和 $H_{j-\frac{1}{2}}^n$ 分别为 $\left[j + \frac{1}{2} \right]$ 和 $\left[j - \frac{1}{2} \right]$ 界面上的无粘数值通量。对应于不同的差分格式, 无粘数值通量的表达式不同。

1.1 Harten 的 TVD 格式

对应于 Harten 的二阶精度的 TVD 格式, 其数值通量的表达式可以写成^[1]

$$H_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[E_j + E_{j+1} + R_{j+\frac{1}{2}} \Phi_{j+\frac{1}{2}} \right] \quad (2)$$

1.2 修正后的 Osher-Chakraverthy 的 TVD 格式

Osher、Chakraverthy 等人根据 TVD 概念提出了新的格式, 并对格式进行了修正。于修正后的 Osher-Chakraverthy 的二阶 TVD 格式, 其数值通量的表达式如下^[2]

$$H_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[E \left(Q_{j+\frac{1}{2}}^L \right) + E \left(Q_{j-\frac{1}{2}}^R \right) - \bar{R}_{j+\frac{1}{2}} \Phi \left(d_{j+\frac{1}{2}} \right) \bar{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \right] \quad (3)$$

式中

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^L = Q_j + R_j \left\{ \frac{1+\Phi}{4} \alpha_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1-\Phi}{4} \alpha_{j-\frac{1}{2}} \right\} \quad (4)$$

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^R = Q_j + R_j \left\{ \frac{1+\Phi}{4} \alpha_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1-\Phi}{4} \alpha_{j-\frac{1}{2}} \right\} \quad (5)$$

1.3 Jameson 的 LED 格式

对应于 LED 格式, 其数值通量的表达式为

$$H_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (E_{j+1} + E_j) - d_{j+\frac{1}{2}} \quad (6)$$

式中 $d_{j+\frac{1}{2}}$ 数值耗散模型, 对于二阶的 LED 格式, 则

$$d_{j+\frac{1}{2}} = C_{(2)} \Delta Q_{j+\frac{1}{2}} - C_{(4)} \left[\Delta Q_{j+\frac{3}{2}} - 2\Delta Q_{j+\frac{1}{2}} + \Delta Q_{j-\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

其中 $C_{(2)}$ 、 $C_{(4)}$ 为变量系数, 其取值使格式满足 LED 条件^[3]。

将上述数值方法推广到三维流场, 详细的计算公式及有关差分格式的具体表达式请详见文献 [3]。

2 格式的对比分析

通过三维钝头双锥体高超音速绕流场的数值计算, 对前面给出的三种差分格式, 从对激波的分辨率、粘性边界层计算的准确性及计算效率等三个方面进行了分析对比。算例的几何外形为钝头双锥体。图 1 给出了计算网格示意图。

计算参数如下:

$$M = 9.9 \quad \text{Re} = 2.2 \times 10^5 \quad T = 49.8K \quad \text{攻角 } \alpha = 4^\circ$$

流动为层流流动。

2.1 格式对激波分辨率的对比分析

我们通过三维钝头双锥体头部附近流场的计算来比较 Harten 的 TVD 格式、Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式以及 LED 格式对激波的分辨率。

图 2 给出了三种格式计算的攻角为 4° 的头部流场等压线。

2.2 粘性边界层计算准确性的对比分析

物面表面热流值计算的准确程度是衡量粘性边界层计算准确性的一个重要的参数。本文为了与实

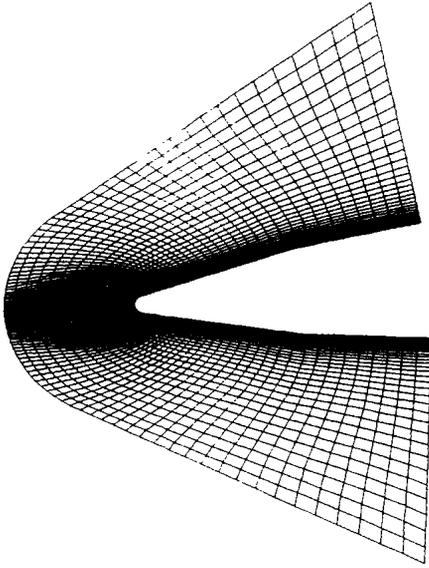
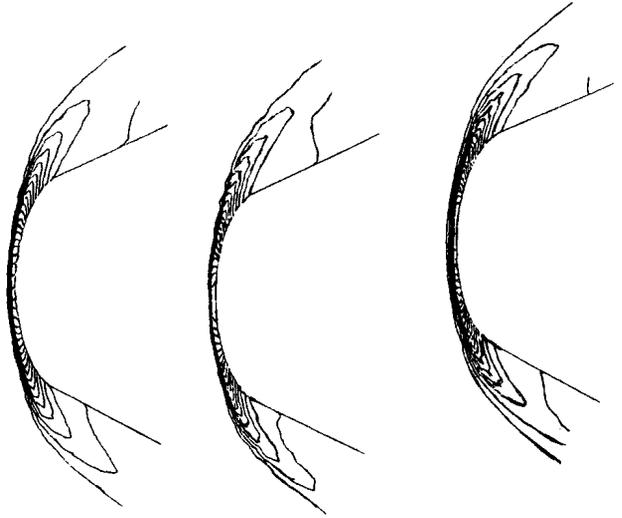


图1 计算网格示意图

Fig. 1 The computational grid



(a) Harten 格式 (b) O-C 格式 (c) LED 格式

图2 头部等压线图 (攻角 4°)Fig. 2 The pressure contour ($\alpha = 4^\circ$)

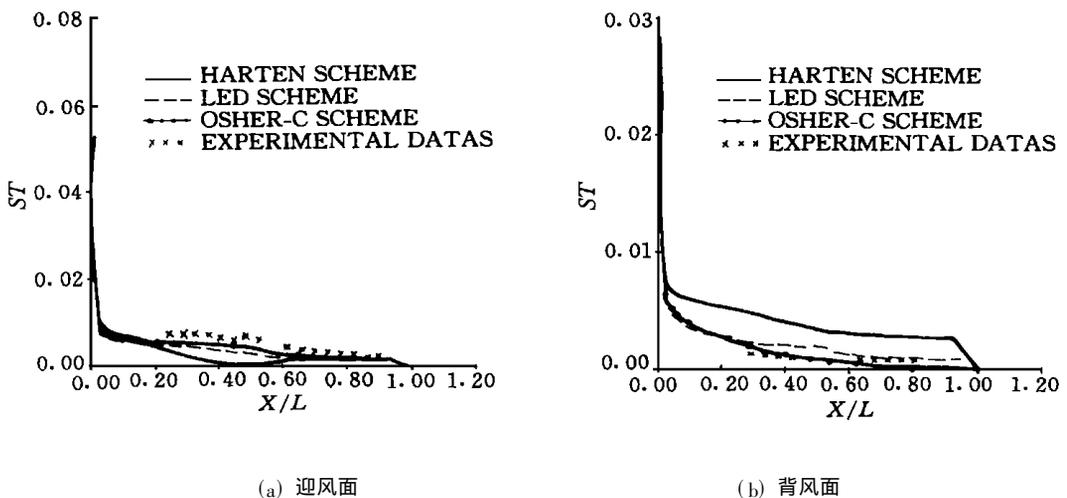
验数据对应, 以壁面 Stanton 数作为比较参数。

我们用上述三种差分格式求解了攻角为 4° 和 12° 的钝头双锥体高超音速绕流流场, 得到了壁面 Stanton 数的分布。

Stanton 数的定义为

$$ST = \frac{\mu T}{(T_0 - T) \text{PrRe}} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (8)$$

图3给出了这三种差分格式计算的攻角为 4° 的壁面 Stanton 数的分布与实验值^[5]的比较。



(a) 迎风面

(b) 背风面

图3 壁面 Stanton 数计算结果与实验结果比较 (攻角 4°)Fig. 3 The comparison of computed and experimental result of stanton number on wall ($\alpha = 4^\circ$)

从图3中可以看到, Osher-Chakravarty 格式和 Jameson 的 LED 格式的计算结果与实验值较接近, 尤其是 Osher-Chakravarty 格式的计算结果的变化趋势和数值与实验较好。Harten 的 TVD 格式的计算结果和实验相比尚有一定的差距。

2.3 差分格式计算效率的对比

在三维复杂流场的数值模拟中, 差分格式的计算效率是一个很重要的影响因素。

图4给出了这三种差分格式的收敛过程曲线图。

从图中可以看到, Jameson 的LED 格式的计算效率最佳。

3 结论

通过三维高超音速粘性绕流流场的数值计算, 对上述三个差分格式进行了比较, 得到以下结论:

(1) 通过头部激波计算结果的比较可以看到: Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式和 Harten 的 TVD 格式对激波的分辨率明显高于 Jameson 的 LED 格式。

(2) 通过壁面 Stanton 数的计算结果与实验结果的比较, 发现 Osher-Chakravarthy 的 TVD 格式和 Jameson 的 LED 格式的计算结果明显好于 Harten 的 TVD 格式计算结果。

(3) 在数值实验中, 以 Jameson 的 LED 格式的计算效率为最高。

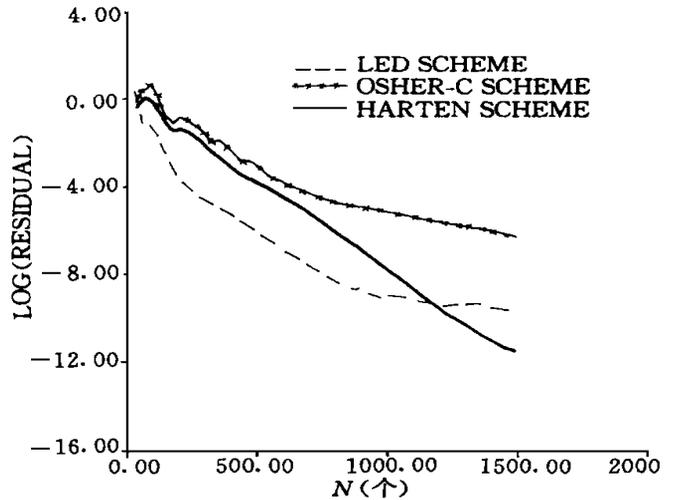


图4 三维流场计算收敛过程曲线

Fig. 4 The curve of convergence

参考文献

- 1 Harten A. A high resolution scheme for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. J. Comp. Phys, 1983, 49
- 2 Osher S, Chakravarthy S R. A new class of high accuracy TVD scheme for hyperbolic conservation laws. AIAA paper 85- 0363, 1985
- 3 Jameson A. Analysis and design of numerical scheme for gas dynamics. N95- 11875, 1995
- 4 李桦. 三维超音速/高超音速复杂流场分区多机并行数值计算与实验验证. 国防科技大学博士论文, 1996