考虑可信度时导弹最大射程的 Bayes 评估*

张士峰 宫二玲

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 首先讨论了一种验前数据和现场试验数据相容性检验的新方法, 考虑验前信息可信度, 研究了导弹最大射程的 Bayes 评定和 Bayes 估计。最后给出了数据分析的例子。

关键词 相容性检验, 可信度, 最大射程, Bayes 评定, Bayes 估计, Bayes 稳健性

分类号 O212

Bayesian Evaluation of Maximum Distance Considering Credibility

Zhang Shifeng Gong Erling

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract First, a new method of consistent testing in prior data and testing data is discussed. Considering credibility, we study Bayesian inference and Bayesian of maximum distance. Finally, the example is given.

Key words consistent testing, credibility, maximum distance, bayesian decision, bayesian estimate, bayesian robustness

1 可信度的定义及计算

验前信息的可信度是和现场试验信息相比较而言, 一般通过验前数据和现场试验数据进行相容性检验获得。它是指验前数据和现场试验数据来源于同一总体的概率。因为现场试验往往比较少, 要想精确计算这种可信度是很困难的, 只能给出可信度的近似解。

对于导弹最大射程评定困难, 在试验之前, 不妨设有 m 个验前的射程信息:

$$L_1^{(0)}, \cdots, L_m^{(0)} \sim N(\bar{L}_m^{(0)}, \sigma^{*2}) \mid \pi(L) \tag{1}$$

其中

$$\bar{L}_m^{(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L_i^{(0)} \tag{2}$$

此时, 当获得了 $n(n < m)$ 个飞行试验的射程信息 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 计算 L^* 的充分统计量 $\bar{L}_n$, 其中

$$\bar{L}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i \tag{3}$$

以现场射程信息作为比较标准, 将验前子样 $L_1^{(0)}, \cdots, L_m^{(0)}$ 与之比较, 判定是否与现场子样 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 相一致 (相容), 如果按上述假设, 射程服从正态分布, 则一致性检验问题转化为期望值相等性检验。

引入统计假设 H_0: 验前子样$(L_1^{(0)}, \cdots, L_m^{(0)})$ 与现场子样$(L_1, \cdots, L_n)$ 属于同一总体。在正态假定之下, H_0: 验前子样总体均值期望值与现场子样总体均值相同。为此, 作

$$\bar{L}_m^{(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L_i^{(0)}, \bar{L}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i$$

则有

* 校预研基金资助项目
1998 年 10 月 30 日收稿
第一作者: 张士峰, 男, 1971 年生, 博士生

$$\bar{L}_m^{(0)} \sim N\left(\mu^{(0)}, \frac{\sigma^{*2}}{m}\right), \bar{L}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^{*2}}{n}\right) \tag{4}$$

于是, 相容性检验问题可化为下面的统计假设问题

$$H_0: \mu - \mu^{(0)} = 0 \leftrightarrow H_1: \mu - \mu^{(0)} \neq 0 \tag{5}$$

因此, 给定犯 I 类错误的概率 α, 有

$$P\left\{- u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \; H_0\right\} = 1 - \alpha \tag{6}$$

其中, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 可以查表得到。

当 $-\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^* u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)} \leq \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^* u_{\frac{\alpha}{2}}$ 时, 接受假设 H_0, 否则, 接受假设 H_1, 认为验前信息和现场信息是不相容的。检验的 OC 函数为

$$\beta(\mu - \mu^{(0)}) = P_{\mu - \mu^{(0)}}(\text{接受}\, H_0) = P_{\mu - \mu^{(0)}}\left\{- u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$= P_{\mu - \mu^{(0)}}\left\{- \lambda - u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)} - (\mu - \mu^{(0)})}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*} \leq - \lambda + u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}} - \lambda)$$

$$- \Phi(- u_{\frac{\alpha}{2}} - \lambda) = \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}} - \lambda) + \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}} + \lambda) - 1, \lambda = \frac{\mu - \mu^{(0)}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*} \tag{7}$$

注意 $\beta(\mu - \mu^{(0)})$ 是 λ 的严格单调下降函数。

通常认为当 $\mu - \mu^{(0)} \geq \delta > 0$ 时, 验前信息和现场信息的总体分布有显著差异, 而当 $\mu - \mu^{(0)} < \delta$ 时, 验前信息和现场信息的总体分布无显著差异, 其中 δ 是根据具体问题给定的两均值差异的容许限。对于上述双边检验问题, H_1 中满足 $\mu - \mu^{(0)} \geq \delta$ 的 $\mu - \mu^{(0)}$ 处的函数值 $\beta(\mu - \mu^{(0)}) \leq \beta$, 其中

$$\beta = \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*}\right) + \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\delta}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma^*}\right) - 1 \tag{8}$$

即考虑容许限时检验中犯 II 类错误的概率不超过 β。

假如接受假设 H_0, 即认为验前信息和现场信息在检验水平下是相容的, 但验前信息毕竟不同于现场信息, 为了应用验前信息进行统计决策分析, 最好能给出验前信息的可信度。

可信度定义为 $P(H_0 \; \text{接受}\, H_0)$, 根据 Bayes 公式 (9)

$$P(H_0 \; \text{接受}\, H_0) = \frac{P(H_0)P(\text{接受}\, H_0 \; H_0)}{P(H_0)P(\text{接受}\, H_0 \; H_0) + P(H_1)P(\text{接受}\, H_0 \; H_1)} = \frac{1}{1 + \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \frac{\beta}{1 - \alpha}}$$

这里

$$P(\text{接受}\, H_0 \; H_0) = 1 - \alpha, P(\text{接受}\, H_0 \; H_1) = \beta$$

$P(H_0), P(H_1) = 1 - P(H_0)$ 为先验可信度, 可以通过分析验前信息的来源(如验前信息由仿真模型给出, 则需要分析仿真模型反映真实系统的程度) 或由专家给出。$P(H_0 \; \text{接受}\, H_0)$ 记为 τ。

2 最大射程的 Bayes 评估

最大射程 L_{max} 是指这样的距离, 它满足

$$P\{L \geq L_{max}\} = 1 - \alpha \tag{10}$$

其中 L 是飞行距离, $1 - \alpha$ 为置信概率。如果 $L \sim N(L^*, \sigma^{*2})$, 其中 L^*, σ^* 为已知, 那么

$$P\{L \geq L_{max}\} = \Phi\left(\frac{L_{max} - L^*}{\sigma^*}\right) \tag{11}$$

其中 $\Phi(\ )$ 是 $N(0,1)$ 分布函数，于是

$$L_{\max} = L^* + \sigma^* \Phi^{-1}(\alpha) \tag{12}$$

如果要对 $L_{\max}$ 进行检验, 在落点的标准差 σ^* 已由散布鉴定中确定出来,即认为 σ^* 为已知的情况下，引入统计假设:

$$H_0: L^* \geq L_{\max} - \sigma^* \Phi^{-1}(\alpha) \triangleq L_0 \leftrightarrow H_1: L^* < L_0 \tag{13}$$

设验前信息为 $L_1^{(0)}, L_m^{(0)}$, 现场信息为 $L = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$。由验前信息获取 L^* 的验前分布 $\pi_0(L^*)$ 为 $N(\bar{L}_m^{(0)}, \frac{\sigma^{*2}}{m})$。记 a_i 为采纳 $H_i(i = 0,1)$ 的行为。而损失函数为 "$0 - K_i$" 损失,

$$L(\theta, a_i) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \theta \in \Theta_i \\ K_i & \text{如果 } \theta \in \Theta_j, j \neq i \end{cases}$$

由文献 [2] 可知，检验的拒绝域为:

$$P(H_1 \mid L) > \frac{K_1}{K_0 + K_1} \tag{14}$$

对于导弹最大射程评定问题，根据 Bayes 公式可以得到

$$P(H_1 \mid L) = \Phi[\sqrt{\rho}(L_0 - \mu(L))] \tag{15}$$

其中

$$\mu(L) = \frac{m\bar{L}_m^{(0)} + n\bar{L}_n^{(0)}}{m + n} \tag{16}$$

$$\rho = \frac{m + n}{\sigma^{*2}} \tag{17}$$

因此检验的临界区域为:

$$D = \left\{ L: \sqrt{\rho}(L_0 - \mu(L)) > \Phi^{-1}\left(\frac{K_1}{K_0 + K_1} \right) \right\} \tag{18}$$

人们习惯于运用效函数来分析统计假设问题，它为

$$P(L^*) = P\{L \in D \mid L^*\} = P\left\{ P(H_1 \mid L) > \frac{K_1}{K_0 + K_1} \mid L^* \right\} \tag{19}$$

犯两类错误的平均概率为:

$$\alpha = \int_{L_0}^{\infty} P(L^*) \pi_0(L^*) \mathrm{d}L^*, \ \beta = \int_{0}^{L_0} (1 - P(L^*)) \pi_0(L^*) \mathrm{d}L^* \tag{20}$$

由于验前信息和现场信息通常不是严格服从同一总体，因此必须考虑验前信息的可信度，将验前信息 $L_1^{(0)}, \cdots, L_m^{(0)}$ 与现场信息 $L = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ 进行相容性检验, 根据上述方法可以计算出验前信息的可信度为 τ。因为所给出的验前分布具有一定的可信度，所以在进行导弹最大射程评定时应该考虑 Bayes 决策的稳健性。所谓稳健性问题是指如果假定的验前分布不合适, 是否会引起验后的统计推断发生较大的差异 (在不同的验前分布之下)。当取定不同的验前分布，Bayes 统计推断是不同的，由此分析 Bayes 方法的稳健性。Bayes 方法稳健性，关键在于稳健的验前信息及其表示。首先应选定验前分布的范围。这里讨论 $\epsilon-$ 污染验前分布族

$$\Gamma = \{\pi: \pi = (1 - \epsilon)\pi_0 + \epsilon q, q \in \Omega\} \tag{21}$$

π_0 是预先选定的验前分布, ϵq 属于污染部分, Γ 应由合理的验前分布组成。为分析 Bayes 验后稳健性, 给出下面两个定理:

定理 1　设 $\pi = (1 - \epsilon)\pi_0 + \epsilon q$, x 为现场样本, θ 为所考虑的参数, 验后密度 $\pi_0(\theta \mid x)$ 和 $q(\theta \mid x)$ 存在, 且 $m(x \mid \pi) > 0$, 则

$$\pi(\theta \mid x) = \lambda(x)\pi_0(\theta \mid x) + [1 - \lambda(x)]q(\theta \mid x) \tag{22}$$

其中

$$\lambda(x) = \frac{(1 - \epsilon)m(x \mid \pi_0)}{m(x \mid \pi)} = \left[1 + \frac{\epsilon m(x \mid q)}{(1 - \epsilon)m(x \mid \pi_0)} \right]^{-1} \tag{23}$$

此外，在 Bayes 决策问题中,

$$\rho(\pi(\theta \mid x), a) = E^{\pi(\theta \mid x)}[L(\theta, a)]$$
$$= \lambda(x)\rho(\pi_0(\theta \mid x), a) + [1 - \lambda(x)]\rho(q(\theta \mid x), a) \tag{24}$$

定理2　设 $\Omega = \{$所有分布$\}, L(\theta, a) = I_C(\theta)$ 为指标函数（indicator function），因此

$$\rho(\pi(\theta \mid x), a) = P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C)$$

则有

$$\inf_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C) = P_0\left[1 + \frac{\epsilon \sup_{\theta \notin C} f(x \mid \theta)}{(1 - \epsilon) m(x \mid \pi_0)}\right]^{-1} \tag{25}$$

$$\sup_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(\theta \mid x)}(\theta \in C) = 1 - (1 - P_0)\left[1 + \frac{\epsilon \sup_{\theta \in C} f(x \mid \theta)}{(1 - \epsilon) m(x \mid \pi_0)}\right]^{-1} \tag{26}$$

其中

$$P_0 = P^{\pi_0(\theta \mid x)}(\theta \in C) \tag{27}$$

对于导弹最大射程评定问题，预先选定的验前分布 π_0 为共轭分布函数 $N(\bar{L}_m^{(0)}, \frac{\sigma^{*2}}{m})$，则

$$\Gamma = \left\{\pi : \pi = (1 - \epsilon) N(\bar{L}_m^{(0)}, \frac{\sigma^{*2}}{m}) + \epsilon q, q \in \Omega\right\} \tag{28}$$

此处 $\epsilon = 1 - \tau$，τ 为验前信息的可信度。因为 Bayes 决策所对应的临界区域（拒绝 H_0 的区域）为：

$$D = \left\{L : P(H_1 \mid L) > \frac{K_1}{K_0 + K_1}\right\}$$

所以要分析 Bayes 决策的稳健性，需要求得 $\inf_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L)$ 及 $\sup_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L)$，根据定理2

$$\inf_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L) = \inf_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(L^* \mid \bar{L}_n)}(L^* < L_0) = P_0\left[1 + \frac{\epsilon \sup_{L^* \geq L_0} f(\bar{L}_n \mid L^*)}{(1 - \epsilon) m(\bar{L}_n \mid \pi_0)}\right]^{-1} \tag{29}$$

$$\sup_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L) = \sup_{\pi \in \Gamma} P^{\pi(L^* \mid \bar{L}_n)}(L^* < L_0) = 1 - (1 - P_0)\left[1 + \frac{\epsilon \sup_{L^* < L_0} f(\bar{L}_n \mid L^*)}{(1 - \epsilon) m(\bar{L}_n \mid \pi_0)}\right]^{-1} \tag{30}$$

这里

$$P_0 = P(H_1 \mid L) = \Phi[\sqrt{\rho}(L_0 - \mu(L))] \tag{31}$$

$$m(\bar{L}_n \mid \pi_0) = \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{2\pi(m + n)}\sigma^*} \exp\left[-\frac{mn}{2(m + n)\sigma^{*2}}(\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)})^2\right] \tag{32}$$

当在 L^* 已知的情况，$\bar{L}_n \sim N(L^*, \frac{\sigma^*}{n})$，即

$$f(\bar{L}_n \mid L^*) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma^*} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^{*2}}(\bar{L}_n - L^*)^2\right] \tag{33}$$

若 $\bar{L}_n \geq L_0$ 时，

$$\sup_{L^* \geq L_0} f(\bar{L}_n \mid L^*) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma^*} \tag{34}$$

$$\sup_{L^* < L_0} f(\bar{L}_n \mid L^*) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma^*} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^{*2}}(\bar{L}_n - L_0)^2\right] \tag{35}$$

若 $\bar{L}_n < L_0$，上述两个等式右边互相交换就可以了。因此可以求得 $\inf_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L)$ 以及 $\sup_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L)$。

此时有结论：当 π 遍历 Γ 时，$P(H_1 \mid L) \in [\inf_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L), \sup_{\pi \in \Gamma} P(H_1 \mid L)]$，则

i) 若 $\inf_{\pi \in \Gamma} P(\Theta_1 \mid L) \geq \frac{K_1}{K_0 + K_1}$，则我们做出拒绝 H_0 的决策，此时的 Bayes 决策是稳健的；

ii) 若 $\sup_{\pi \in \Gamma} P(\Theta_1 \mid L) \leq \frac{K_1}{K_0 + K_1}$，则我们做出采纳 H_0 的决策，此时的 Bayes 决策是稳健的；

iii) 若 $\inf_{\pi \in \Gamma} P(\Theta_1 \mid L) < \frac{K_1}{K_0 + K_1} < \sup_{\pi \in \Gamma} P(\Theta_1 \mid L)$，此时的 Bayes 决策将不是稳健的，需要进一步分析，要么增大试验次数；要么通过各种手段获取更多精度更高的验前信息；但还有另外的可能性，就是我们在进行稳健性分析时，取污染集 Ω 为所有的分布，这种验前分布的取法毕竟太宽了，可能包含有不合理的验前分布，引起了 Bayes 决策的不稳健。因此缩小 Ω 的范围是工程实践中常常考虑的问题。

在假设检验作出决策之后,需要对导弹最大射程作统计估计。因为考虑了验前信息的可信度,若仍然采用ϵ- 污染验前分布族来进行估计,则当π遍历Γ时,所作的估计是变化的,此时应该给出导弹最大射程的最小值作为稳健的最大射程估计。如果取污染集Ω为所有的分布,作出的稳健估计势必会偏小,因为验前分布族包含有不合理的验前分布,所以,在作最大射程的稳健估计时应限制污染集Ω的范围。根据定理 1,限制污染集Ω为$(\bar{L}_m^{(0)} - K, \bar{L}_m^{(0)} + K)$上的均匀分布,通过数值算法,可以得到当$K = K^*$时,导弹最大射程的稳健估计为$\bar{L}_n^*$。

3 数值分析

对于导弹最大射程评定问题,可考虑如下假设检验:

$$H_0: L^* \geq L_0 \leftrightarrow H_1: L^* < L_0$$

$$L_0 = 5199.8, \sigma^* = 1$$

若验前数据有$m = 30$个,$\bar{L}_m^{(0)} = 5199.900$;现场飞行试验数据有$n = 5$个,$\bar{L}_n = 5200.400$,损失函数中$K_0 = K_1$。首先进行验前信息和现场信息的相容性检验,给定$\alpha = 0.1$时,决策规则如下:

当 $\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)} \leq 0.7945$时,认为验前信息和现场信息是相容的;否则,认为验前信息和现场信息是不相容的。

本例中,$\bar{L}_n - \bar{L}_m^{(0)} = 0.5$,因此做出验前信息和现场信息是相容的决策。下面给出验前信息的可信度。假定容许限$\delta = 2$,可以计算出$\beta = 0.1915$。对于不同的先验可信度$P(H_0)$,有下表成立。

表 1 $P(H_0)$和后验可信度τ的关系表

Table 1 Relation between $P(H_0)$ and τ

$P(H_0)$	50%	60%	70%	80%	90%	100%
τ	0.8245	0.8757	0.9164	0.9495	0.9769	1

若$P(H_0) = 70\%$,则$\tau = 0.9164$,通过计算可以得到:

$$P_0(\Theta\;L) = 0.1573, \inf_{\pi\in\Gamma} P(\Theta_1\;L) = 0.1346, \sup_{\pi\in\Gamma} P(\Theta\;L) = 0.2114。$$

因此可以做出采纳H_0的决策,此时的 Bayes 决策是稳健的。同时,计算出了导弹最大射程的稳健 Bayes 估计为:$\hat{L}^* = 5199.9656$。

4 结束语

本文讨论的导弹最大射程 Bayes 评估问题考虑了验前信息的可信度,从 Bayes 稳健性的角度出发分析了最大射程的 Bayes 评定和 Bayes 估计,做出的决策更加可信。如果不考虑验前信息的可信度,当验前信息和现场信息的相容性程度并不很高时,做出的决策将不是稳健的。因此 Bayes 方法在利用验前信息时需要考虑验前信息的可信度,以便做出的决策更加稳健、更加可信。

参考文献

1 James O. Berger Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (Second Edition). Springer-Verlag, 1985

2 张金槐,唐雪梅. Bayes 方法(修订版). 长沙:国防科技大学出版社,1993

3 黎子良. 统计推断与决策. 天津:南开大学出版社,1987

4 Morris Hamburg. Statistical Analysis for Decision Making (Third Edition). Harcourt Brace Jovanovich (HBJ), Inc., 1983