

基于小波的信噪分离方法*

涂国勇 杨乐平 崔吉俊

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 本文在 Donoho 提出的从噪声中恢复信号的非线性小波方法的基本原理的基础上, 并针对非线性小波方法的核心问题——浮动阈值的设定提出了新的算法。通过算例证明, 所设计的浮动阈值在实际应用中效果较好, 特别在低信噪比时信号恢复效果明显优于现常用的浮动阈值设计方法。

关键词 非线性小波方法, 噪声去除, 浮动阈值计算

分类号 O32

Study on an Approach of Signal Noise Separation Based Wavelet

Tu Guoyong Yang Leping Cui Jijun

(Department of Astronautics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper nonlinear wavelet approach to the recovery of signal from noisy data proposed by D. L. Donoho is described, and a new improved algorithm is provided aiming at the key problem of the approach, threshold design. The practical computing examples show that this new algorithm is very efficient, especially when signal noise ratio is lower. This algorithm is evidently better than that often used now.

Key words nonlinear wavelet approach, noise suppression, threshold design

数据测量经常受到各种噪声信号的干挠和影响, 例如测试环境中各种电磁干扰信号的存在, 电源、接地、屏蔽和振动等环节都可能导入各种噪声信号。在实际工程应用中, 为了提高参数辨识或数学建模的准确度, 在对测量数据进行分析处理之前, 必须尽可能消除含于测量数据中的噪声信号。一般而言, 解决噪声干扰既可以采用硬件抑制的方法, 如各种滤波电路设计和屏蔽措施; 也可以采用软件处理的方法, 即用各种信噪分离算法来消除噪声影响。软件处理方法由于灵活性强, 适应面广而具有特别的重要性, 因此, 各种信噪分离方法的研究一直是人们关心的问题。

传统方法通常采用线性平滑的滤波技术, 其结果必然在降低噪声的同时展宽了信号的波形, 平滑了信号中锐变尖峰成份, 损失信号突变点可能携带的重要信息。尽管人们已经发展了许多抑制或降低噪声的方法, 但采集到的数据仍然混有噪声。噪声对数据或信号的影响或者以相乘的形式出现, 即所谓乘性噪声; 或者以相加的形式出现, 即所谓加性噪声。后者具有较大的普遍性。本文所讨论的主要是加性噪声的数据处理和信号恢复方法。

计算机科学的迅速发展, 为研究这类问题提供了硬件设备, 而近来发展起来的小波理论为解决这类问题提供了方法和软件, 其中 Donoho 提出的非线性小波方法从噪声中恢复信号效果最明显。要用非线性小波方法很好地实现信噪分离, 关键的问题是如何设计出好的浮动阈值, 本文就这个问题提出了一种新的算法。

1 非线性小波方法的基本原理

小波变换是将信号与一个在时域和频域均具有良好局部化性质的展缩小波函数进行积分, 把信号分解为位于不同频带和时段内的各个成分。

设 $\Psi \in L^1 \cap L^2$ 且 $\Psi(0) = 0$ 则按如下方式生成的函数族 $\{\Psi_{ab}\}$

$$\Psi_{ab}(t) = a^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad b \in R, a \in R^+ \quad (1)$$

* 1998年9月7日收稿

第一作者: 涂国勇, 男, 1971年生, 硕士生

上式中 a 为展缩尺度因子, b 为平移因子, Ψ 为基本小波函数, 且满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0 \text{ 和 } C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(w)^2}{w} dw < \infty \quad (2)$$

信号 $f(t)$ 小波离散分解算式如下:

$$f(t) = S_J f(t) + \sum_{j=1}^J D_j f(t) \quad (3)$$

$$S_J f(t) = \sum_{k,z} c_{J,k} \mathcal{Q}_{J,k}(t) \quad (4)$$

$$D_j f(t) = \sum_{k,z} w_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (5)$$

上式中 $w_{j,k}$ 就是信号分解的小波系数, 其中 j 是分解的尺度因子, k 是位移因子, $j = j_0, j_1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, 2^{j-1}$, $c_{J,k}$ 是尺度函数分解系数。根据小波理论, 信号 $f(t)$ 可以由小波系数精确重构。

信号的性质可以用它的小波系数来刻画, 小波系数较大者, 携带的信号能量较多, 小波系数较小者携带的信号能量较少, 因此可用携带能量的多少作为衡量小波系数在信号中的权重大小。引入以信号能量为判据的浮动阈值来作为甄别受到噪声污染的小波系数, 将等于和小于阈值的小波系数视为零而舍去, 把这些值当作噪声处理掉, 仅仅用阈值以上的小波系数来重建原信号, 既去掉了大部分噪声, 又不致于引起重建结果的明显失真, 这就是非线性小波方法用于从噪声中恢复信号的实质。

假定要研究的是区间 $[0, 1]$ 上的信号 $f(t)$, 观测所获得的相应数据为:

$$y(t_i) = f(t_i) + \sigma^* z_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

其中 z_i 是加性白噪声, σ 是噪声强度, t_i 是等间隔的采样点, 为方便计算, 样本个数表示为 $n = 2^{J+1}$ 。从噪声数据 $y(t)$ 中测出 $f(t)$ 的方法由三个步骤组成:

(1) 对数据 $\beta^{J+1,k} = y^k / \sqrt{n}$ 设定初条件, 用正交小波基对数据做滤波处理, 得出带有噪声的小波系数 $W_{j,k}, j = j_0, j_1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, 2^{j-1}$ 。

(2) 非线性函数 $\mathcal{N}(w) = \text{sgn}(w) (|w| - t)_+$ 作用于数据并设定浮动阈值 $t = \sqrt{2 \log(n)} \sigma / \sqrt{n}$, 由此给出子波系数 $w_{j,k}$ 的估值 $a_{j,k}$ 。

(3) 令所有的 $j > J$ 子波系数 $\hat{a}_{j,k} = 0$, 然后进行小波反演重建以求得信号 $f(t)$ 的估值 $\hat{f}(t), t \in [0, 1]$ 。

2 浮动阈值设计改进思想

当给定信号 $f(t) \in L^2(R)$ 及其二进小波变换 $W_{2^j} f(t)$ 作为已知条件时, 可以根据 $W_{2^j} f(t)$ 的局部极大模位置及在这些点上的 $W_{2^j} f(t)$ 之值来重建 $f(t)$, 这也可以理解为小波变换局部极大模及位置携带了原信号的主要特征。白噪声在任何一组正交基中仍然是同样强度的白噪声, 上述设计的浮动阈值就基于了这种等强度的观点, 在甄除噪声的同时, 也去除了了一部分信号, 当信噪比很大时, 对恢复原信号几乎没有什么影响, 但是, 当信噪比较低时, 就会去除很大一部分信号, 原信号失真比较明显。根据小波变换局部极大模理论, 在甄除噪声时, 只要甄除掉白噪声的小波变换局部极大模所形成的那部分系数能量, 就可将大部分噪声去除掉。根据文献[4], 白噪声的小波变换系数极大模的平均密度与尺度因子 S 有如下关系式成立:

$$d_s = \frac{1}{S\pi} \left[\frac{\Psi^{(2)}}{2\Psi^{(1)}} + \frac{\Psi^{(1)}}{\Psi} \right] \quad (6)$$

式中 d_s 是白噪声的小波系数极大模的平均密度, $\Psi^{(1)}$ 和 $\Psi^{(2)}$ 是小波函数 Ψ 的一阶微分和二阶微分。从式(6)可以看出, 系数极大模的平均密度 d_s 与尺度因子 S 成反比。如此, 本文所设计的浮动阈值如下式:

$$t = \sqrt{2 \log(n)} \sigma / S \quad (7)$$

式中 σ 是通过噪声小波系数极大模估计出的噪声强度。

3 算例分析

分别对高信噪比和低信噪比两种例子分别进行了计算处理, 所得结果如图 1 和图 2 所示(各图从上

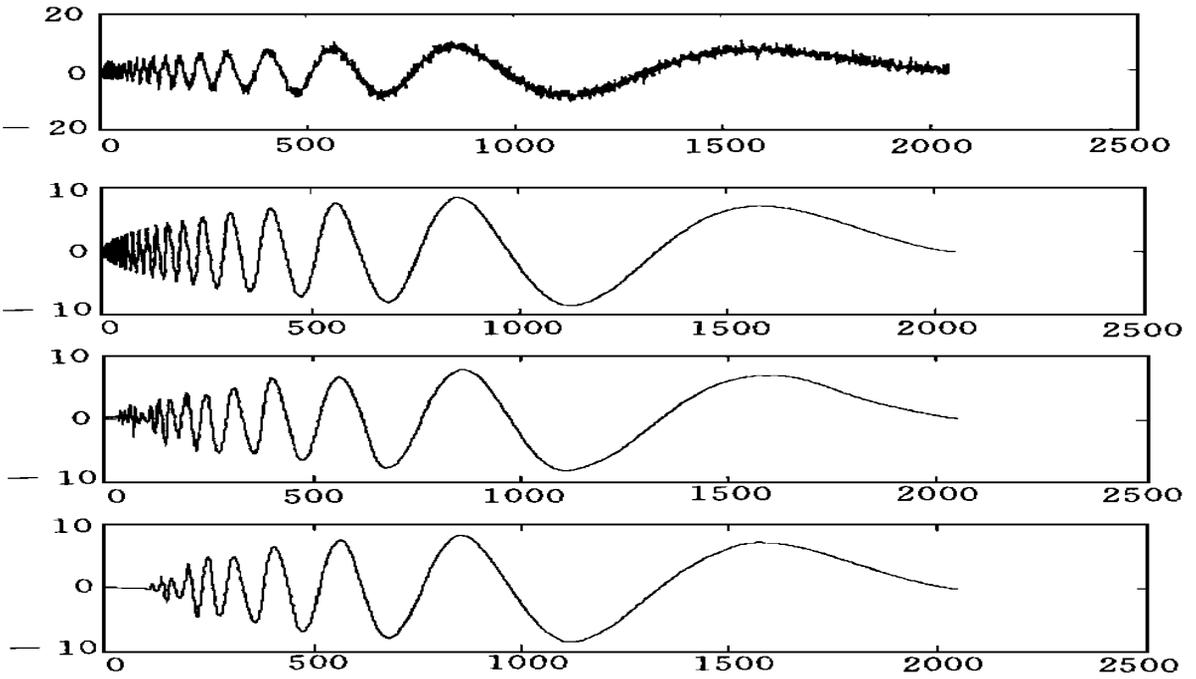


图1 高信噪比时两种浮动阈值噪声去除图

Fig. 1 Noise suppression of two threshold when signal noise ratio is high

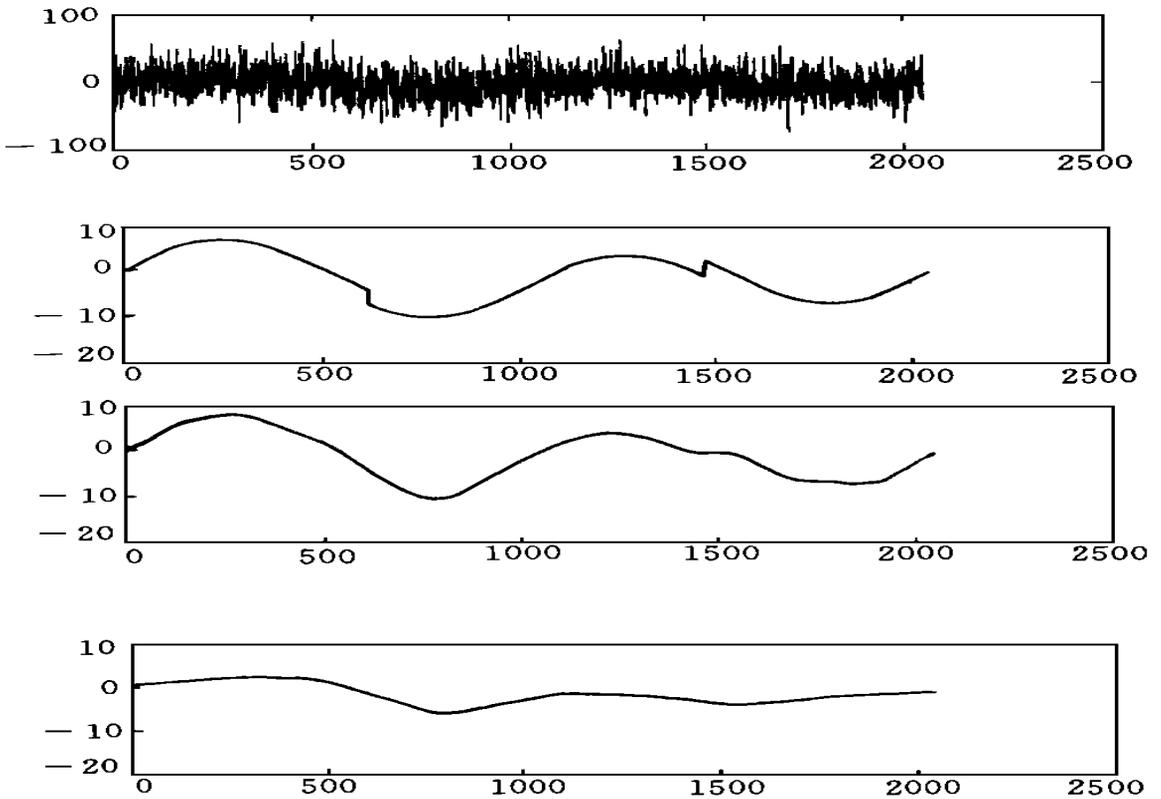


图2 低信噪比时两种浮动阈值噪声去除图

Fig. 2 Noise suppression of two threshold when signal noise ratio is lower

而下依次是原信号+ 噪声、原信号、采用本文所提出的浮动阈值去除噪声后的信号、采用同强度理论所

提出的浮动阈值去除噪声后的信号图)。

4 结论与建议

从以上算例可以看出,在高信噪比时,本文所提出的浮动阈值设计与现常用的浮动阈值在去除噪声后,都能保持原信号的大部分特征,基本上不失真,这是由于此时噪声能量与信号能量相比很低的原因;在低信噪比时,本文所提出的浮动阈值与现常用的浮动阈值在去除噪声中比较,从图 2 可以明显看出,本文所提出的方法优于现常用的浮动阈值设计方法。

通过算例知道,应用非线性小波方法进行噪声去除,其去除的质量与选取的正交小波基、浮动阈值的设置方法、小波分解尺度的大小都有着密切的关系。(1) 选取的正交小波基应具有高阶消失矩。如果消失矩很低,则原信号中的某些奇异点就不能被检测出来,阈值以后就会消弱原信号在这些点的奇异特征,造成去除噪声后的信号大大失真。从图中可看出由于所选取的正交小波基所具有消失矩小的原故,恢复后的前一小段信号与原信号相比有一定的差别;(2) 一般有两种小波系数的阈值方法为 $\text{sign}(w_{j,k} - T)_+$ 和 $w_{j,k} * (w_{j,k} > T)$ 。在信噪比很大时,采用第二种方法,可以减少计算量,同时也能满足一定要求,但与第一种方法相比显然是比较粗糙的。一般尽可能采用第一种方法,其滤除噪声的质量较第二种方法高。(3) 选取比较大的小波分解尺度,一般取 $J = \log_2(\text{length}(f(t))) - 1$,这样可最大限度的去除噪声。

参考文献

- 1 Donoho D L. De-Noising by Soft- Thresholding. IEEE transactions on information theory, 1995, 41(3)
- 2 Stephane Mallat. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE transactions on information theory, 1992, 38(2)
- 3 Stephane Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1989, 11(7)