

# 二维虚拟 ESPRIT 算法\*

刘 全 王雪松 皇甫堪

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

**摘 要** ESPRIT 算法是一种快速的高分辨率方向估计方法,但它是一种一维估计方法,不能直接推广到二维方向估计。本文在 ESPRIT 的基础上,针对一种特定的阵列结构,提出了一种计算量很小的二维估计方法——二维虚拟 ESPRIT,它的计算量同一维 ESPRIT 相当。

**关键词** 方向估计, ESPRIT 算法

**分类号** TN911.7

## 2-D Virtual ESPRIT Algorithm

Liu Quan Wang Xuesong Huangfu Kan

(Institute of Electronic Engineering, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** ESPRIT algorithm is a fast direction finding method with high resolution, but it is a 1-D method and can't be generalized to 2-D directly. This paper, based on a special array geometry, proposes a new 2-D direction finding method—2-D Virtual ESPRIT algorithm, whose low computation cost is comparable with to that of 1-D ESPRIT algorithm.

**Key words** direction finding, ESPRIT algorithm

ESPRIT 算法<sup>[1,2]</sup>是一个经典的信号子空间方向估计方法,它具有计算量小、估计效果好的优点。但它是一种一维估计方法,只能估计来自二维平面的信号源的方向。如果要估计来自三维空间的信号源的两个方向,而在两个方向上用 ESPRIT 算法分别求出这两个方向,则最后还需要配对。因此如何将 ESPRIT 算法推广到二维,是一个很有意义的问题。Martin Haardt<sup>[5]</sup>提出的二维 Unitary ESPRIT 算法能够适用于矩形阵列,而 Cherian Mathews<sup>[6]</sup>提出的 UCA-ESPRIT 算法则适用于圆形阵列,此外还有其它一些方法<sup>[3,4]</sup>,这些方法各有其优缺点。本文针对一种特定的阵列构造,将 ESPRIT 算法推广到二维,它的计算量很小,和一维 ESPRIT 算法相当,缺点是不能用于信号源有相同方位角的情形,另外估计的信号数不够多。

## 1 ESPRIT 算法

ESPRIT 算法是近几年发展起来的一种高分辨率方向估计算法,它利用了阵元阵列的旋转不变性,获得了很高的估计精度和分辨率,是目前最有效的方法之一。下面对其进行一下介绍。

设阵元由两个子阵列组成,且一个子阵列可由另一个子阵列平移得到,例如在图 1 中,  $\{X_1, X_2, X_3\}$  构成子阵列  $X$ ,  $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$  构成另一个子阵列  $Y$ 。设每个子阵列有  $N$  个阵元,相应阵元间的位移量为  $d$  (一般设为半波长),又设有  $M$  个互不相干的信号源 ( $M < N$ ), 其中心频率为  $\omega$ , 噪声在时域及空域上与信号不相关,功率为  $\sigma^2$ , 则第  $i$  个

阵元偶接收到的信号为:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) a_i(\theta_k) + n_{x_i}(t)$$

\* 1998 年 12 月 7 日收稿

第一作者: 刘全, 男, 1971 年生, 博士生

$$y^i(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) \exp(j\omega d \cos \theta_k / c) a^i(\theta_k) + n_{y_i}(t)$$

写成向量形式

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}_x(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}_y(t)$$

矩阵  $\mathbf{P}$  是一个  $M \times M$  的对角阵

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{e^{jY_1}, \dots, e^{jY_M}\} \quad Y_k = \omega d \cos \theta_k / c$$

令  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{y}^T]^T = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}_z(t)$ , 其中,

$$\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}^T \quad \mathbf{P}^T \mathbf{A}^T]^T, \mathbf{n}_z(t) = [\mathbf{n}_x^T \quad \mathbf{n}_y^T]^T$$

根据  $\bar{\mathbf{A}}$  的结构, 我们就可以求出  $\mathbf{P}$ , 而不必知道  $\mathbf{A}$ , 这就是 ESPRIT 算法的基本思想。

ESPRIT 算法计算比较简单, 估计精度和分辨率都很高, 是一个很好的方法。但它只是一个一维方向估计方法, 有必要推广到二维。

## 2 二维虚拟 ESPRIT 算法

从上面可知, 因为  $\mathbf{P}$  中只包含了一个方向的信息, 所以 ESPRIT 只能估计一个方向。如果  $\mathbf{P}$  中包含两个方向的信息, 且可以有效分开(如分别在模和相位中), 那么就可以估计两个方向了, 这就是二维虚拟 ESPRIT 算法的出发点。

考虑下面这样一个阵列, 如图 2, 阵列由三个子阵列  $Y_0, Y_1$  和  $Y_2$  组成, 每个子阵列有  $N$  个阵元, 子阵列相互平行, 且完全相同,  $Y_1$  和  $Y_2$  对称于  $X$  轴, 和  $X$  轴的距离为  $D_y$ , 其第一个阵元和  $Y$  轴的距离为  $D_0$ , 子阵列中阵元间距为  $D_x$ 。设  $M (M < N)$  个信号源(波长  $\lambda$ )和  $X$  轴、 $Y$  轴的夹角分别为  $\alpha, \beta, i = 1, 2, \dots, M$ , 噪声为与信号不相关的功率为  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 则可以写出每个子阵列所采得的信号。

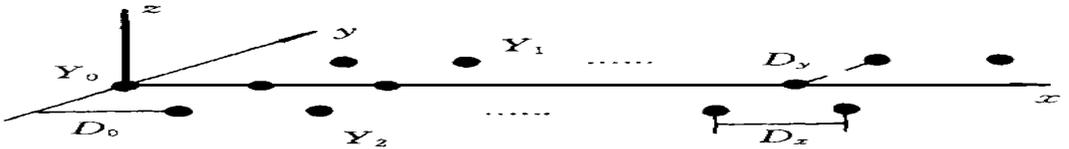


图 2 二维虚拟 ESPRIT 算法阵列结构

Fig. 2 Array geometry for 2-D virtual ESPRIT

子阵列  $Y_0$  的第  $i$  个阵元在时刻  $t$  的采样为

$$Y_{0i}(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) \exp(j u_{ik}) + n_{0i}(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

子阵列  $Y_1$  的第  $i$  个阵元在时刻  $t$  的采样为

$$Y_{1i}(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) \exp[j(u_{ik} + u_{0,k} + v_k)] + n_{1i}(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

子阵列  $Y_2$  的第  $i$  个阵元在时刻  $t$  的采样为

$$Y_{2i}(t) = \sum_{k=1}^M s_k(t) \exp[j(u_{ik} + u_{0k} + v_k)] + n_{2i}(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

式中  $u_{ik} = 2\pi(i - 1)D_x \cos \alpha k / \lambda, u_{0,k} = 2\pi D_0 \cos \alpha k / \lambda, v_k = 2\pi D_y \cos \beta k / \lambda$

写成向量形式

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}_0$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{s} + \mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{P}_2\mathbf{s} + \mathbf{n}_2$$

其中

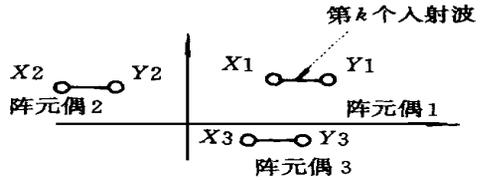


图 1 ESPRIT 算法阵列结构

Fig. 1 Array geometry for ESPRIT

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_0 &= [y_{0,1}(t) \quad y_{0,2}(t) \quad \dots \quad y_{0,N}(t)]^T \\
\mathbf{y}_1 &= [y_{1,1}(t) \quad y_{1,2}(t) \quad \dots \quad y_{1,N}(t)]^T \\
\mathbf{y}_2 &= [y_{2,1}(t) \quad y_{2,2}(t) \quad \dots \quad y_{2,N}(t)]^T \\
\mathbf{n}_0 &= [n_{0,1}(t) \quad n_{0,2}(t) \quad \dots \quad n_{0,N}(t)]^T \\
\mathbf{n}_1 &= [n_{1,1}(t) \quad n_{1,2}(t) \quad \dots \quad n_{1,N}(t)]^T \\
\mathbf{n}_2 &= [n_{2,1}(t) \quad n_{2,2}(t) \quad \dots \quad n_{2,N}(t)]^T \\
\mathbf{A} &= [\mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \dots \quad \mathbf{a}^M] \\
\mathbf{a}_i &= [\exp(ju_{1,i}) \quad \exp(ju_{2,i}) \quad \dots \quad \exp(ju_{N,i})]^T \\
\mathbf{P}_1 &= \text{diag}[\exp[j(u_{0,1} + v_1)] \quad \exp[j(u_{0,2} + v_2)] \quad \dots \quad \exp[j(u_{0,M} + v_M)]] \\
\mathbf{P}_2 &= \text{diag}[\exp[j(u_{0,1} - v_1)] \quad \exp[j(u_{0,2} - v_2)] \quad \dots \quad \exp[j(u_{0,M} - v_M)]]
\end{aligned}$$

从上面的式子可以看出,  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  中包含了信号源的方位和俯仰信息, 但由于同时存在于相位中, 难以有效分开, 因而不能直接从中求出信号的方位和俯仰角。但如果我们令  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) / \sqrt{2}$  (除以  $\sqrt{2}$  是为了使  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{y}_0$  中的噪声功率相等), 则有  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{s} + (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) / \sqrt{2}$ , 其中  $\mathbf{P} = \text{diag}[\cos v_1 \exp(ju_{0,1}) \cos v_2 \exp(ju_{0,2}) \quad \dots \quad \cos v_M \exp(ju_{0,M})] \times \sqrt{2}$ 。可以看出,  $\mathbf{P}$  中仍包含有方位和俯仰信息, 并且分别位于模和相位中, 能够有效利用, 而  $\mathbf{P}$  可以用和 ESPRIT 算法同样的方法求得。由于  $\mathbf{P}$  是由两个子阵列合成而得, 因此可称为二维虚拟 ESPRIT 算法。当有信号的方位角相同时, 此时  $\mathbf{A}\mathbf{P}$  不满秩, 本方法将失效, 因而本方法不能适用于此种情况。另外,  $D_y$  和  $D_0$  的选取有一定要求, 否则会有相位模糊现象, 一般可选  $D_y = \lambda/4$ ,  $D_0 = \lambda/2$ , 这时  $0 < v_i < \pi/2$ ,  $\cos v_i$  为正, 可由  $\mathbf{P}$  的对角元素的模(等于  $\sqrt{2} \cos v_i$ ) 求得  $v_i$ , 相位求得  $u_{0,i}$ 。但  $D_y$  和  $D_0$  的选取不是唯一的, 例如我们也可以选取  $D_y = \lambda/2$ ,  $D_0 = \lambda/4$ , 此时  $-\pi/2 < u_{0,i} < \pi/2$ ,  $0 < v_i < \pi$ ,  $\exp(ju_{0,i})$  的实部为正, 故我们可以根据  $\mathbf{P}$  的对角元素  $\sqrt{2} \cos v_i \exp(ju_{0,i})$  的实部的符号知道  $\cos v_i$  的符号, 其绝对值也可得到, 从而可求得  $v_i$ , 进而求得  $u_{0,i}$ 。本文方法的最大优点是计算量很小, 从计算过程可以看出, 其计算量和一维 ESPRIT 算法相当。下面列出二维虚拟 ESPRIT 算法的步骤:

- (1) 获得  $\mathbf{z} = [\mathbf{y}_0^T \quad \mathbf{y}_1^T]^T$  协方差矩阵  $\mathbf{R}_z$  的估计  $\hat{\mathbf{R}}_z$
- (2) 计算  $\{\hat{\mathbf{R}}_z, \mathbf{U}_n\}$  的广义特征分解  $\hat{\mathbf{R}}_z \mathbf{E} = \mathbf{U}_n \mathbf{E} \mathbf{Q}$ , 其中  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}\}$ ,  $\lambda_1 \dots \lambda_{2N}$ , 且  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{2N}]$ 。
- (3) 分解信号子空间  $\mathbf{E}_s = \mathbf{U}_n [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M] = [\mathbf{E}_x^T \quad \mathbf{E}_y^T]^T$ 。
- (4) 计算矩阵的特征分解  $(\lambda_1 \dots \lambda_M): \mathbf{E}_{xy}^H \mathbf{E}_{xy} = [\mathbf{E}_x \quad \mathbf{E}_y]^H [\mathbf{E}_x \quad \mathbf{E}_y] = \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{E}^H$ , 其中  $\mathbf{E}_{xy} = [\mathbf{E}_x \quad \mathbf{E}_y]$ , 并将  $\mathbf{E}$  分成 4 块  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix}$ 。
- (5) 计算  $\mathbf{V} = \mathbf{E}_{12} \mathbf{E}_{22}^{-1}$  的特征值  $v_k, k = 1, 2, \dots, M$ , 并根据  $X, Y$  轴上平移间距的选取分别求出方位角和俯仰角。

### 3 仿真结果和结论

设每个子阵列阵元数  $N = 6$ , 互不相关的信号源数  $M = 2$ , 和  $X, Y$  轴的夹角  $(\alpha, \beta)$  分别为  $(45^\circ, 50^\circ)$ 、 $(65^\circ, 75^\circ)$ , 其 100 次的统计结果见表 1。

总之, 在各种将 ESPRIT 算法推广到二维的方法中, 本文的方法计算量较小, 这是它的主要优点。但它也有不少不足, 如不能用于有相同方位角的情况, 可估计的信号数较少(最多  $N$  个)等, 这些都有待进一步的研究、改进。

表1 仿真结果( $N=6, M=2, SNR=20\text{dB}$ )Table 1 Simulation result( $N=6, M=2, SNR=20\text{dB}$ )

快拍数		均值	标准差
50	信号 1	(44.998, 49.997)	(0.107, 0.078)
	信号 2	(65.005, 74.986)	(0.209, 0.517)
100	信号 1	(45.004, 49.990)	(0.054, 0.061)
	信号 2	(65.006, 74.980)	(0.121, 0.205)
200	信号 1	(44.988, 50.003)	(0.056, 0.040)
	信号 2	(64.990, 75.012)	(0.090, 0.138)
400	信号 1	(45.002, 49.999)	(0.030, 0.029)
	信号 2	(64.997, 74.994)	(0.080, 0.065)

## 参考文献

- Roy R H. ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. Ph.D. dissertation, Stanford Univ. 1987
- Roy R, Kailath T. ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. IEEE Trans. ASSP, vol. 37, no. 7, pp984-995, 1989
- Swindlehurst A, Kailath T. Azimuth/Elevation Direction Finding Using Regular Array Geometries. IEEE Trans. AES, vol. 29, no. 1, pp145-155, Jan. 1993
- Vander Veen A J, Ober P B and Doretter E F. Azimuth/Elevation Computation in High Resolution DOA Estimation. IEEE Trans. SP, vol. 40, no. 7, pp1828-1832, July, 1992
- Haardt M, Efficient One-, Two-, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing. Ph.D Thesis
- Mathews C P, Zoltowski M D. Eigenstructure Techniques for 2-D Angle Estimation with Uniform Circular Arrays. IEEE Trans. SP, vol. 42, no. 9, pp3295-2406, Sept, 1994
- 殷勤业, 邹理和, Newcomb R W. 一种高分辨率二维信号参量估计方法——波达方向矩阵法. 通信学报, 1991, 12(4): 1~7