

地形相关算法度量值的统计特性*

朱华勇 沈林成 常文森

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘要 考虑到地形相关匹配算法度量值统计特性与二维地形自相关系数的关系,本文提出一种改进的约翰逊方法——相关地形下的匹配算法度量值统计特性分析方法。首先,基于约翰逊方法的问题框架,修改其中基准数据的相邻像元值相互独立的假设,导出了地形相关 MSD 算法度量值的统计分布的解析函数。然后,讨论了约翰逊方法与本文方法的适用性,指出了约翰逊方法的不足之处。最后,给出了本文方法在地形可匹配性分析中的一种应用。

关键词 相关算法度量,地形相关适配性,虚定位概率

分类号 TP24

Research on Statistical Properties of Measures of Terrain Correlation Algorithms

Zhu Huayoung Shen Lincheng Chang Wensen

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract Considering the relationship between the measures of terrain correlation algorithms and the 2-D self-correlation coefficient of terrain, this paper proposes an improved Johnson method to analyze the statistical properties of measures of matching algorithms on correlated terrain. First, based on the issue of Johnson method, we modify the independence assumption of consecutive elements in reference data and develop distribution functions of measures of MSD. Then, the suitability of Johnson method and our method are discussed, and the shortcomings of the former are pointed out. Finally, an application of our method to terrain correlation suitability, to estimate the false-fix probability in correlated non-matching positions is presented.

Key words measures of correlation algorithms, terrain correlation suitable, fail-fix probability

地形相关匹配算法度量值的统计特性,是分析被考察区域的地形可匹配性能的基础。现有的文献资料^[1~3]仅研究了匹配位置处算法度量值 $M(0)$ 及远离匹配位置处算法度量值 $M(\cdot)$ 的分布,而且对地形统计模型的假设(尤其是对地形的相关性的假设)过于理想化,因此,相应的结论与实际情况和要求存在较大差异:一方面,类似于约翰逊假设^[1]中关于基准数据的相邻像元值相互独立的要求是不能满足的,通过修正独立像元数来放宽相邻像元独立的处理也不尽合理;另一方面,地形相关长度往往是空间定位精度的若干倍,必须考虑相关长度之内的非匹配位置上的匹配算法度量值的分布特性, $M(0)$ 和 $M(\cdot)$ 的分布对此问题显然无能为力。

本文假定在局部区域上地形是各态历经的宽平稳高斯过程,研究了任意位置上的匹配算法度量值 $M(J)$ 的统计分布特性。

1 问题的描述

在地形相关匹配中,为了度量两个地形剖面之间的相似性,通常采用 ρ_{roc} 、MAD 或 MSD 算法。相关算法度量值的统计特性与匹配性能指标有着密切的关系。约翰逊曾建议过一种计算度量值统计特性的方法^[1],为便于分析,他对问题做了如下假设:

1) 基准数据 x_i 是平稳各态历经的零均值高斯过程,方差为 σ_x^2 。

* 1998年12月24日收稿

第一作者:朱华勇,男,1971年生,博士生

2) 实时数据 y_i 被认为是附加噪声 n_i 的基准数据, 即 $y_i = x_i + n_i$, 假设噪声 n_i 是一个平稳各态历经的零均值高斯过程, 方差为 σ_n^2 , 并进一步假设 x_i 和 n_i 彼此独立。

3) 基准数据 x_i 的集合和噪声记录 n_i 中, 它们各自的相邻像元值相互独立。

以 MSD 算法为例(用 D_J 表示 $M(J)$):

$$D_J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{i+J} - y_i)^2, I \triangleq (i, 0)^T$$

其中:

N 为进行相关的数据像元总数, 即一维实时图长度;

I 指示基准子图或实时图中的第 i 个像元;

J 为基准子图相对于实时图位置的二维位置偏移量;

考虑到随机过程的统计量可以对集合求取, 那么, 对于集合 K 的第 k 个元, 即第 k 次实验, MSD 算法的度量值可写为

$$D_J^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{i+J}^k - y_i^k)^2$$

度量值的集合均值为

$$\overline{D_J} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K D_J^k$$

度量值的集合均值为

$$\sigma_{\overline{D_J}}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (D_J^k - \overline{D_J})^2$$

在约翰逊假设之下, 可导出如下结果:

$$\begin{cases} \overline{D_0} = \sigma_n^2 \\ \overline{D_J} = 2\sigma_x^2 + \sigma_n^2 \\ \sigma_{\overline{D_0}}^2 = \frac{2}{N} \sigma_n^4 \\ \sigma_{\overline{D_J}}^2 = \frac{2}{N} (\sigma_x^2 + \sigma_n^2)^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, N 为独立像元数, 当地形基准数据相邻像元独立时, N 等于一维实时图长度。

为了将上述结果应用于实际工程, 约翰逊提出用地形相关长度修正独立像元数。假设地形的自相关系数是近似指数型的, 而且是可分离的, 即

$$\rho_{h,v} = e^{-\frac{h}{L_h}} e^{-\frac{v}{L_v}}$$

其中 h 和 v 分别表示横向和纵向的位移增量, L_h 和 L_v 分别是横向和纵向的地形相关长度。那么, 对一维相关系统的独立像元数修正为

$$N = \frac{N_2}{L_h}$$

其中 N_2 是一维实时图的像元数, 假设飞行器沿 h 方向飞行。

2 度量值统计特性分析

承前述问题框架, 但直接考虑基准数据中相邻像元的相关性, 对 MSD 算法度量值的统计特性进行分析。

$$\text{记 } S_{IJ}^k = x_{i+J}^k - y_i^k = x_{i+J}^k - x_i^k - n_i^k$$

则有

$$E[S_{IJ}] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_{IJ}^k = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x_{i+J}^k - x_i^k - n_i^k) = 0$$

表1 MSD算法度量值统计量(两种方法对比)

Table 1 Statistics of measures of MSD algorithms (Comparisons of two methods)

	约翰逊方法	本文方法
$\overline{D_0}$	σ_n^2	σ_n^2
$\overline{D_J}$	$2\sigma_n^2 + \sigma_n^2$	$2(1 - \rho_J)\sigma_n^2 + \sigma_n^2$
$\sigma_{D_0}^2$	$\frac{2}{N}\sigma_n^4$	$\frac{2}{N}\sigma_n^4$
$\sigma_{D_J}^2$	$\frac{2}{N}(2\sigma_n^2 + \sigma_n^2)^2$	$\frac{2}{N}(2(1 - \rho_J)\sigma_n^2 + \sigma_n^2)^2 + \frac{4}{N^2}\sigma_n^4$
参数差异	N 为独立像元数; 相邻地形像元独立;	$N-1$ $\sum_{i=1}^{N-1} (N-i)(2\rho_{J-T} - \rho_{J+T} - \rho_{J-T})^2$ N 为一维实时图长度; ρ_J 为二维地形自相关系数;

4 度量值统计特性应用

对于地形相关匹配定位系统来说,当存在噪声和其它误差的条件下,度量函数 $M(J)$ 在匹配搜索平面上形成多个随即起伏的相关峰,其中,有的甚至比匹配位置的相关峰还要大,这种偶发事件称为虚定位。文献^[3]将定位误差大于地形相关长度的称为虚定位误差,并利用

$$Prob[M(\text{)} > M(0)]$$

作为独立搜索区间内的“单次试验”的虚定位概率 P_F 的悲观估计。这种方法至少存在三方面的问题:

- $M(\text{)}$ 的分布的估计误差很大,导致 P_F 的置信度很低;
- 虚定位概率的悲观估计对地形的可匹配性评价没有很强的约束;
- 定义的虚定位误差不适于高精度地形相关系统的可匹配性分析。

基于本文方法,由于地形相关长度范围之内的各位置匹配算法度量值的统计分布特性可以用地形基准数据的方差、噪声的方差以及地形的自相关系数等基本统计量的解析函数来表示,这就为研究地形的基本统计量与定位误差概率的关系提供可能。

定义虚定位概率的乐观估计为

$$P_{F1} = Prob[M(0) > M(J) | J = \epsilon]$$

此处的虚定位误差定义为超过定位精度($< \epsilon$)的定位误差,被考察的虚定位事件集合为距离匹配位置 ϵ 处的独立虚定位事件子集。由于 P_{F1} 是虚定位概率的乐观估计,因此,满足实际系统要求的匹配区域的 P_{F1} 值不能超过的系统要求的虚定位概率限,也就是说,虚定位概率估计 P_{F1} 对匹配区域的筛选具有明确的指导意义。

例如,取 ϵ 为一个网络(即把在非匹配位置发生最小相关峰都认为是虚定位事件),考虑正交方向上两个(近似独立的)虚定位事件:

$$P_{F1} = 1 - \int_D p(D_1/J = 0) p(D_1/J = (0, 1)^T) dD_1 \int_D p(D_2/J = (1, 0)^T) dD_2 dD$$

$$= 1 - \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{z^2}{2}) \left[\frac{1}{2} - \text{erf}(A_1 z + B_1) \right] \left[\frac{1}{2} - \text{erf}(A_2 z + B_2) \right] dz$$

其中

$$A_1 = \frac{\sigma_{D_0}}{\sigma_{D(0,1)}}, B_1 = \frac{\overline{D_0} - \overline{D(0,1)}}{\sigma_{D(0,1)}}$$

$$A_2 = \frac{\sigma_{D_0}}{\sigma_{D(1,0)}}, B_2 = \frac{\overline{D_0} - \overline{D(1,0)}}{\sigma_{D(1,0)}}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{为误差函数。}$$

取地形标准差、地形相关长度及噪声标准差的若干组典型值, 计算虚定位概率的估计值, 各组计算结果示于图 1 和图 2。

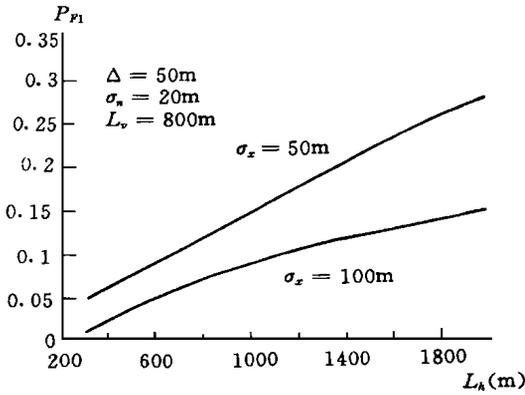


图 1 虚定位概率随前向地形相关长度的变化

Fig. 1 Fail-fix probability changes with forward correlation length of terrain

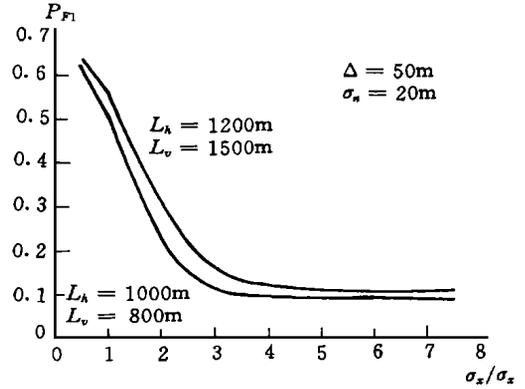


图 2 虚定位概率随地形信噪比的变化

Fig. 2 Fail-fix probability changes with SNR of terrain

从计算的结果可见, 在地形标准差相同的条件下, 较小的地形相关长度有利于匹配定位; 在一定地形相关长度和噪声水平条件下, 较大的地形标准差对匹配定位是有益的, 但是, 当地形标准差与噪声标准差的比值大于 3 时, 这种改善已不显著。

5 结论

地形相关匹配定位系统的性能与匹配区域内相关算法度量值的分布密切相关。本文根据相关算法中像元间的相关性与地形二维自相关系数的关系, 提出了一种适合于计算任意位置的匹配算法度量值统计特性的方法。用此方法可以解决约翰逊方法及其它方法不能解决的, 估计匹配位置邻域内度量值统计分布的问题。将邻近匹配位置的度量值统计分布应用于虚定位概率的乐观估计, 对地形适配性评价具有重要的指导意义, 这表明了本文方法的价值。

参考文献

- 1 Johnson M W. Analytical Development and Test Results of Acquisition Devices Used in Navigation Systems. 10th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 1972: 1~9
- 2 孙仲康, 沈振康. 数字图像处理. 北京: 国防工业出版社, 1985
- 3 Hinrichs P R. Advanced Terrain Correlation Techniques IEEE proc. of location and navigation Symp. 1976: 89~96