

## 非圆链轮分度线的样条拟合\*

闵小平

(长沙大学 长沙 410003)

**摘要** 非圆链传动中, 两链轮分度线为非圆形, 该曲线数学表达式是一个非线性函数方程组, 严格求解这一函数方程组似乎毫无希望, 但是依据动力学的方法可以构造此曲线的切线系, 即一切线多边形。从而将这一问题转化为求与切线多边形每条边相切的逼近曲线。

**关键词** CAD, 链轮, 拟合, Bezier 曲线

**分类号** O29

## Cubic Rational Bezier Spline Curve With A Given Set of Tangents of Chain Wheel

Ming Xiaoping

(Changsha University, Changsha, 410003)

**Abstract** The mathematical description of chain-wheel drives with two fixed non-circular wheels, a transmission chain of constant length and given non-constant velocity-ratio leads to a system of nonlinear functional equations. It seems impossible to solve these equations, but we can construct a set of tangents of these wheels by kinematic methods. The desired curve can be approximated by constructing spline curve. This paper considers piecewise rational cubic Bezier curve which has all these tangents as tangents, the curve is  $G^2$ -continuous and shape-preserving.

**Key words** CAD, Bezier curve, chain-wheel, fitting

在机械设计中, 有关非圆链传动的问题, 其中绕定轴转动的主、从动链轮分度线为非圆形, 传动链为定长, 两轮传动比为给定的非常数值。求两链轮分度线曲线的方程, 得出了一个非线性方程组, 严格求解这一函数方程组似乎毫无希望, 但是通过动力学方法可以构造此曲线的一组切线系, 即一个闭的切线多边形<sup>[1]</sup>。该多边形应该随链轮呈外凸性, 这样求非线性函数方程的复杂问题便转化为一个求与切线多边形每边相切的几何问题。解决这一几何问题的有效方法就是找到该分度线的逼近曲线。文[1]中描述的分段三次 Bezier 逼近曲线有三个缺点: 其一, 必须求解一个大型的矢量线性方程组, 计算量大; 其二, 对参数的不同选取, 使逼近曲线可能出现多余的拐点, 从而失去保凸性; 其三, 逼近曲线形状不能作局部修改, 给节曲线设计带来困难。

## 1 有理三次 Bezier 曲线及性质

设有理三次 Bezier 曲线

$$r(u) = \frac{1}{w(u)} [(1-u)^3 w_0 b_0 + 3u(1-u)^2 w_1 b_1 + 3u^2(1-u) w_2 b_2 + u^3 w_3 b_3], \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

其中  $w(u) = (1-u)^3 w_0 + 3u(1-u)^2 w_1 + 3u^2(1-u) w_2 + u^3 w_3$ , 且权因子  $w_i > 0$ 。显然有

$$r(0) = b_0, r(1) = b_3$$

令

$$r^*(u) = (1-u)^3 w_0 b_0 + 3u(1-u)^2 w_1 b_1 + 3u^2(1-u) w_2 b_2 + u^3 w_3 b_3$$

则(1)可改写为

$$r(u)w(u) = r^*(u)$$

\* 1998年12月1日收稿  
作者: 闵小平, 女, 1963年生, 讲师

$$r(u) = \frac{1}{w(u)} [r^*(u) - w(u)r(u)]$$

$$r(u) = \frac{1}{w(u)} [r^*(u) - 2w(u)r(u) - w(u)r(u)]$$

从而有下面端点信息公式

$$\begin{cases} r(0) = b_0 & r(1) = b_3 \\ r'(0) = 3 \frac{w_1}{w_0} a_1 & r'(1) = 3 \frac{w_2}{w_3} a_3 \end{cases} \quad (2)$$

端点曲率公式

$$\begin{cases} k(0) = \frac{2w_0w_2}{3w_1^2} \frac{a_1 \times a_2}{a_1^3} \\ k(1) = \frac{2w_3w_1}{3w_2^2} \frac{a_2 \times a_3}{a_3^3} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a_i = b_i - b_{i-1}$ .

文[3]证明当  $b_0, b_1, b_2, b_3$  确定的控制多边形为凸, 且  $w_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ , 则  $r(t)$  是凸曲线.

## 2 逼近曲线的构造

设  $v_0, v_1, \dots, v_n$  是平面为  $n+1$  个顶点, 如图 1.

我们构造一闭分段三次有理 Bezier 曲线  $p(u)$ ,  $p(u)$  是与切线多边形每边相切, 几何上  $(G^2-)$  连续曲线. 为使曲线段尽可能少, 我们选择三次有理 Bezier 曲线段的两个端点在切线多边形边上, 且为切点, 曲线在切点处达到  $G^2$  连续.

为方便起见, 将凸多边形顶点作扩充

$$v_{n+1} = v_0, \quad v_{n+2} = v_1$$

由于凸多边形有  $n+1$  条边, 所以有  $n+1$  个切点, 从而  $p(u)$  有  $n$  段有理三次 Bezier 曲线.

设第  $i$  段有理三次 Bezier 曲线为

$$p_i(u) = \frac{1}{w^{(i)}(u)} \sum_{j=0}^3 B_{j,3}(u) w_j^{(i)} b_j^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq u \leq 1$$

其中  $w^{(i)}(u) = (1-u)^3 w_0^{(i)} b_0^{(i)} + 3u(1-u)^2 w_1^{(i)} b_1^{(i)} + 3u^2(1-u) w_2^{(i)} b_2^{(i)} + u^3 w_3^{(i)} b_3^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$  为 Bezier 点, 切点  $b_0^{(i)}, b_3^{(i)}$  在多边形边上.

取

$$b_3^{(i-1)} = b_0^{(i)} = \lambda v_{i-1} + (1-\lambda) v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

式中  $\lambda$  是切点调节参数且  $0 < \lambda < 1$ .

注意  $b_0^{(0)} = b_0^{(n+1)}$ , 为保证每段曲线为凸曲线, 其它 Bezier 点的选取为:

$$b_1^{(i)} = w b_0^{(i)} + (1-u_i) v_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$b_2^{(i)} = 1_i v_i + (1-1_i) b_3^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

式中  $0 < 1_i, u_i < 1$  是可调参数.

由上面 Bezier 点的选取可知: 每段曲线是凸曲线, 且只能与切线多边形一致. 接下来我们确定有理 Bezier 曲线的权因子以保证所有曲线段是  $G^2$  连续. 由 Bezier 曲线端点性质(2)知:

$$p_{i-1}(1) = b_3^{(i-1)} = b_0^{(i)} = p_i(0), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

即曲线  $p(u)$  是连续的封闭曲线. 又

$$p_{i-1}'(1) = \frac{3w_2^{(i-1)}}{w_3^{(i-1)}} (b_3^{(i-1)} - b_2^{(i-1)}) = \frac{3w_2^{(i-1)}}{w_3^{(i-1)}} 1_{i-1} (1-\lambda_i) (v_i - v_{i-1})$$

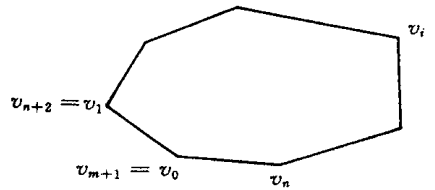


图 1 凸切线多边形

Fig. 1 Convex Tangent Polygons

$$p_i(u) = \frac{3w_1^{(i-1)}}{w_0^{(i-1)}}(b^{(i)} - b_0^{(i)}) = \frac{3w_1^{(i-1)}}{w_0^{(i-1)}}(1 - u_i)\lambda(v_i - v_{i-1})$$

上式证明曲线在连接点(切点处)是  $G^1$  连续。

设  $p_i(u)$  在两端点的曲率为  $k_i(0), k_i(1)$  则由信息公式(3)有:

$$k_{i-1}(1) = \frac{2w_3^{(i-1)}w_1^{(i-1)}a_2^{(i-1)} \times a_3^{(i-1)}}{3(w_2^{(i-1)})^2 a_3^{(i-1)^3}}$$

$$k_i(0) = \frac{2w_0^{(i)}w_2^{(i)}a_1^{(i)} \times a_2^{(i)}}{3(w_1^{(i)})^2 a_1^{(i)^3}}$$

要使曲线达到  $G^2$  连续, 必须有

$$k_{i-1}(1) = k_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1 \tag{4}$$

式中  $k_{n+1}(0) = k_0(0)$  .

为方便起见, 记

$$A_{i-1}^{(1)} = \frac{a_2^{(i-1)} \times a_3^{(i-1)}}{a_3^{(i-1)^3}}, A_i^{(0)} = \frac{a_1^{(i)} \times a_2^{(i)}}{a_1^{(i)^3}}$$

则由(4)可得:

$$\frac{w_3^{(i-1)}w_1^{(i-1)}}{(w_2^{(i-1)})^2}A_{i-1}^{(1)} = \frac{w_0^{(i)}w_2^{(i)}}{(w_1^{(i)})^2}A_i^{(0)} \tag{5}$$

则(5)式化简为

$$w_3^{(i-1)}A_{i-1}^{(0)} = w_0^{(i)}A_i^{(0)}, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1 \tag{6}$$

为使问题简化, 取

$$w_1^{(i)} = w_2^{(i)} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

式中  $w_0^{(i+1)} = w_0^{(i)}, A_{i+1}^{(0)} = A_i^{(0)}$  .

由(6)知: 只要确定相应的  $w_3^{(0)}, w_3^{(1)}, \dots, w_3^{(n)}$ , 即可由(6)式求出  $w_0^{(0)}, w_0^{(1)}, \dots, w_0^{(n)}$  . 反过来只要确定  $w_0^{(0)}, w_0^{(1)}, \dots, w_0^{(n)}$ , 由(6)式求出  $w_3^{(0)}, w_3^{(1)}, \dots, w_3^{(n)}$  . 从而证明了曲线  $p(u)$  是  $G^2$  连续的。

### 3 结论和实例

从上面分析可知, 只要选取初权因子  $w_3^{(0)}, \dots, w_3^{(n)}$ , 则由(6)式求出  $w_0^{(0)}, w_0^{(1)}, \dots, w_0^{(n)}$ , 从而使节曲线  $p(u)$  达到  $G^2$  连续。  $P(u)$  的构造过程简单, 编程方便, 整条曲线局部可修改, 即修改切点仅仅影响两段相应的 Bezier 曲线的形状, 调整权因子,  $w_3^{(i)}$  仅使与之相应的下一段曲线发生变化。下面用一个例子表明链轮分度线拟合。

给定链轮分度线的一切线多边形, 当取  $\lambda = 1/4$  时, 它的三次有理 Bezier 样条拟合曲线近线如图 2 所示。

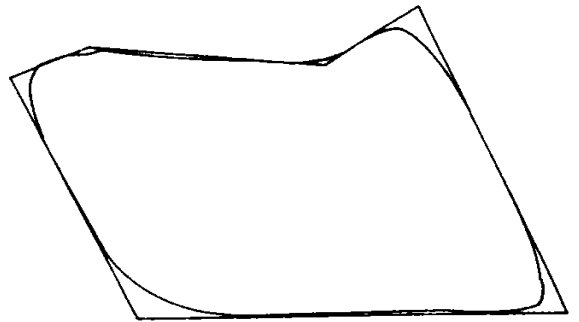


图 2 链轮分度线拟合

Fig. 2 Chain-wheel fitting

### 参考文献

- 1 Hering L. Closed ( $c^2$  and  $c^2-$  continuous) Bezier and B-spline curves with given tangent polygons. CAD. 1983(1) 3~6
- 2 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 航空航天大学出版社, 1993
- 3 刘鼎元. 有理 Bezier 曲线. 应用数学学报, 1985, 8(1): 70~83.
- 4 濮良贵. 机械设计. 北京: 高等教育出版社