

多柔体系统动力学模型的集中参数近似方法

黄新生 黄圳圭 黄柯棣

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘要 提出了有限元方法和数值积分相结合获得多柔体系统集中参数模型的近似方法, 并基于 Lagrange 方程, 对有根树型拓扑结构的多柔体系统进行建模。

关键词 多体系统, 建模, 仿真, 动力学

分类号 O313. 3

An Approximate Method of Flexible Multibody System Dynamics Lumped Parameter Model

Huang Xinsheng Huang Zhengui Huang Kedi

(Department of Automatic Control, NU DT, Changsha, 410073)

Abstract This paper presents an approximate method of flexible multibody system lumped parameter model combined finite element with numerical integration. Based on Lagrange's method, the flexible multibody dynamics model of rooted topological tree is built.

Key words multibody system, modelling, simulation, dynamics

近十多年来, 多体动力学迅速发展, 多体系统的理论建模方法、计算机模拟及工程应用十分活跃, 多柔体系统本质上是一分布参数系统, 具有无穷维和对体积积分的表示形式, 对其进行分析十分困难。通常对多柔体系统动力特性分析研究的方法有: (1) 以有限元为代表的离散方法; (2) 连续模型方法; (3) 混合模型方法; (4) 其它方法^[1,2]。随着计算机运算速度的提高和存储空间的增大, 有限元方法的运用越来越广泛。离散方法一般是近似处理的方法, 如有限元近似, 模态计算线性化近似, 模态截断近似等, 通过近似把复杂的分布参数形式的模型转化为集中参数模型。本文主要讨论用有限元方法, 结合数值积分手段, 获得多柔体系统集中参数模型的方法。

1 梁的模型参数

梁的模型参数可用有限元方法计算, 记:

$$\underline{u}_i = [u_{i-1}, \gamma_{i-1}, u_i, \gamma_i]^T \quad (1)$$

称 \underline{u}_i 为第 i 单元的结点位移, 下画线标记为坐标分量表示。 u_{i-1} , u_i 为左右两端点在 y 方向的线位移, γ_{i-1} , γ_i 分别为左右两端点的角位移 (见图 1)。

单元内任一点的位移可插值表示为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= N(x) \underline{u}(t) \quad (\text{线位移}) \\ \dot{u}(x, t) &= N(x) \dot{\underline{u}}(t) \quad (\text{角位移}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $N(x)$ 为多项式向量:

$$N(x) = \left[1 - \frac{3x^2}{l_i^2} + \frac{2x^3}{l_i^3}, x - \frac{2x^2}{l_i} + \frac{x^3}{l_i^2}, \frac{3x^2}{l_i^2} + \frac{2x^3}{l_i^3}, -\frac{x^2}{l_i} + \frac{x^3}{l_i^2} \right] \quad (3)$$

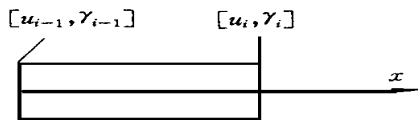


图 1 第 i 单元位移

Fig. 1 Displacement of i th segment

* 国家 863 项目资助, 国家部委基金项目资助
1999 年 3 月 28 日收稿
第一作者: 黄新生, 男, 1955 年生, 副教授

式中 l_i 为单元长度。令

$$\delta_{2i-2} = u_{i-1}, \delta_{2i-1} = Y_{i-1}, \delta_{2i} = u_i, \delta_{2i+1} = Y_i$$

$$\underline{\delta} = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2N_g+1}] \quad (4)$$

称 $\underline{\delta}$ 为整梁的结点位移, N_g 为单元数。应用有限元法可算得梁的固有频率与固有振型为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_m}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{(2N_g+1)1} \end{bmatrix}, \phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{02} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{(2N_g+1)2} \end{bmatrix}, \dots, \phi_m = \begin{bmatrix} \phi_{0m} \\ \phi_{1m} \\ \vdots \\ \phi_{(2N_g+1)m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

引入模态坐标:

$$\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_m}]^T$$

则

$$\underline{\delta} = \sum_{j=1}^{N_m} \Phi_j \xi_j \quad \text{或} \quad \delta_i = \sum_{j=1}^{N_m} \phi_{ij} \xi_j \quad (i = 1, 2, \dots, 2N_g + 1) \quad (6)$$

2 多柔体运动参数

2.1 方向余弦阵

设 B_j 体相对于参考体 B_L 的刚性角位移为 θ_j , 若不考虑 B_j 与 B_L 的弹性位移时, 其位置应为 $O_L - O_j - O_k$, 若只考虑 B_L 的弹性位移, 其位置为 $O_L - O_j - O_k$ 。如同时考虑 B_j 与 B_L 的弹性位移时, 其位置为 $O_L - O_j - O_k$ (见图2), B_j 体相对 B_L 体的方向余弦 K_j 与 B_j 体的刚性角位移 θ_j 有关, 还与参考体末端的弹性角位 Y_{jd} 有关, 相对 B_L 体的转角为 $\theta + Y_{jd}$, 设 B_L 体有 N_{mL} 个有限元结点, 则 Y_{jd} 可用 B_L 体的模态坐标 ξ_{Li} 表示为

$$Y_{jd} = \sum_{i=1}^{N_{mL}} \phi_{(2N_{gL}+1)i} \xi_{Li} \quad (7)$$

$\phi_{(2N_{gL}+1)i}$ 为 B_L 体第 i 振型的第 $2N_{gL} + 1$ 分量, N_{mL} 为 B_L 体的

模态截断数, ξ_{Li} 为坐标第 i 分量。选择的浮动坐标系与不发生弹性位移时的刚体坐标系一致, 原点在参考体铰接处, x 轴向为切线方向。这样选择浮动坐标系的优点是描述方便, 并便于单向递推, 缺点是只能处理小变形问题, B_L 与 B_j 体浮动坐标系之间的方向余弦可表示为

$$K_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta + Y_{jd}) & -\sin(\theta + Y_{jd}) & 0 \\ \sin(\theta + Y_{jd}) & \cos(\theta + Y_{jd}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.2 B_j 体角速度

考虑 B_L 体在 O_j 处的弹性角速度 \dot{Y}_{jd} 的影响后, B_j 体角速度 \underline{W}_j 为以下递推形式:

$$\underline{W}_j = \underline{K}_j^T \underline{W}_L + \underline{\Omega} + \underline{K}_j^T \dot{Y}_{jd} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

其中:

$$\underline{\Omega} = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}]^T$$

$$\dot{Y}_{jd} = [0 \quad 0 \quad \dot{Y}_{jd}]^T \quad Y_{jd} = \sum_{i=1}^{N_{mL}} \phi_{(2N_{gL}+1)i} \xi_{Li}$$

2.3 B_j 体内任一微元的速度

B_j 体内任一微元的矢径为 (在 B_j 体坐标系中的表示)

$$r_i(x, t) = \underline{K}_j^T r_{id} + \underline{\rho}_i + \underline{u}_i; \quad r_{id} \text{---} O_j \text{ 铰矢径}$$

$$\underline{\rho}_i = [x \quad 0 \quad 0]^T \quad \underline{u}_i = [0 \quad u_j(x, t) \quad 0]^T$$

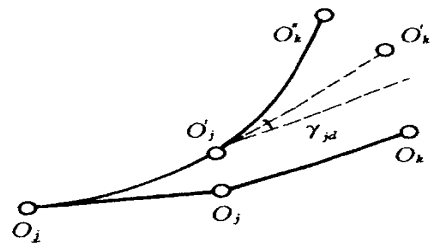


图2 柔体变形描述

Fig. 2 Deformation of flexible body

$$\underline{V}_j = \underline{K}_j^T \underline{V}_{jd} + \underline{W}_j \times (\underline{\rho}_j + \underline{u}_j) + \underline{u}_j^{\circ} \quad (10)$$

3 几个基本积分式

为了推导系统的动能及偏导数, 先计算与弹性位移有关的积分。

有关 $u(x, t)$ 的积分计算公式: 设单元长度 l_i , 单元质量 m_i , 密度为 ρ , 横截面积为 A , 则

$$\begin{aligned} \int_m u(x, t) dm &= \sum_{i=1}^{N_g} \int_0^{l_i} \rho A u(x, t) dx = \sum_{i=1}^{N_g} \frac{m_i}{l_i} \int_0^{l_i} u(x, t) dx = \sum_{i=1}^{N_g} \frac{m_i}{l_i} \left[\int_0^{l_i} N(x) dx \right] \underline{u}_i(t) \\ &= \sum_{j=1}^{N_m} C_j \xi_j(t) = \underline{C} \xi(t) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \underline{C} = [C_1, C_2, \dots, C_{N_m}]; C_j = \sum_{i=1}^{N_g} m_i \left[\frac{1}{2} (\phi_{2i-2, j} + \phi_{2i, j}) + \frac{l_i}{12} (\phi_{2i-1, j} - \phi_{2i+1, j}) \right] \quad (11)$$

同样方法, 可获得下列积分计算公式:

$$\int_m x u(x, t) dm = \underline{D} \xi(t) \quad (12)$$

$$d_i = \sum_{k=1}^{N_g} \frac{m l}{N_g^2} \left(\frac{10k-7}{20} \phi_{2k-2, i} + \frac{5k-2}{60} \frac{1}{N_g} \phi_{2k-1, i} + \frac{10k-3}{20} \phi_{2k, i} - \frac{5k-2}{60} \frac{1}{N_g} \phi_{2k+1, i} \right)$$

$$\int_m u^2(x, t) dm = \xi^T \underline{M} \underline{M} \xi \quad (13)$$

$$\underline{M} \underline{M} = \text{diag}[M_{11} M_{22} \dots M_{N_m N_m}], \quad M_{ii} = \underline{\phi} \underline{M}_i \underline{\phi}$$

\underline{M}_i 为质量矩阵, 由有限元计算给出, 当 $\underline{\phi}$ 为归一化振型时,

$$M_{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N_m$$

应变势能:

$$U = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \underline{K} \underline{\delta} = \frac{1}{2} \xi^T \underline{K} \underline{K} \xi \quad (14)$$

$$\underline{K} \underline{K} = \text{diag}[K_{11}, K_{22} \dots K_{N_m N_m}]$$

$$K_{ii} = \lambda^2 M_{ii} \quad i = 1, 2, \dots, N_m$$

当 $\underline{\phi}$ 为归一化振型时, $K_{ii} = \lambda^2 \quad i = 1, 2, \dots, N_m$

其它计算公式:

$$\underline{G}_j = \int_m \underline{u}_j dm = [0 \quad \underline{C}_j \underline{\xi}_j^{\circ} \quad 0]^T \quad (15)$$

$$\underline{B}_{jj} = \int_m \underline{B}_j dm = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{C}_j \underline{\xi}_j \\ 0 & 0 & -m_j x_{cj} \\ -\underline{C}_j \underline{\xi}_j & m_j x_{cj} & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{其中: } \underline{B}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_i \\ 0 & 0 & -x_i \\ -u_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\underline{C}_{jj} = \int_m \underline{B}_j^T \underline{B}_j = \begin{bmatrix} \underline{\xi}_j^T \underline{M} \underline{M}_j \underline{\xi}_j & -\underline{D}_j \underline{\xi}_j & 0 \\ -\underline{D}_j \underline{\xi}_j & I_{zj} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\xi}_j^T \underline{M} \underline{M}_j \underline{\xi}_j + I_{zj} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\underline{H}_j = \int_m \underline{B}_j^T \underline{u}_j dm = [0 \quad 0 \quad -\underline{D}_j \underline{\xi}_j]^T \quad (18)$$

$$\underline{S}_{jk} = \int_m \frac{\partial \underline{B}_j^T}{\partial \hat{q}^k} \underline{B}_j dm = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\xi}_j}{\partial \hat{q}^k} \underline{M} \underline{M}_j \underline{\xi}_j & -\underline{D}_j \frac{\partial \underline{\xi}_j}{\partial \hat{q}^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial \underline{\xi}_j}{\partial \hat{q}^k} \right) \underline{M} \underline{M}_j \underline{\xi}_j \end{bmatrix}$$

式中: x_{cj} —— B_j 体质心 C_j 在 B_j 体坐标系中的 x 坐标; I_{zj} —— B_j 体对 Z_j 轴转动惯量。

4 Lagrange 方程

由

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad T_i = \frac{1}{2} \sum_m \underline{V}_i^T \underline{V}_i dm$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

q_α 为系统广义坐标, 包括刚性角运动和柔性模态坐标, 总自由度为 N , 将 \underline{V}_i 表示式代入方程, 展开并作近似积分, 可得各项表示式如下:

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_\alpha} = \sum_m \frac{\partial \underline{V}_i^T}{\partial q_\alpha} \underline{V}_i dm = \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial q_\alpha} (m_i \underline{V}_{id} - B_{ii} \underline{W}_i + \underline{G}_i) - \underline{W}_i^T \frac{\partial B_{ii}}{\partial q_\alpha} \underline{V}_{id} + \underline{W}_i^T S_{ii} \underline{W}_i \quad (20)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_\alpha} = \sum_m \frac{\partial \underline{V}_i^T}{\partial q_\alpha} \underline{V}_i dm = \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial q_\alpha} (m_i \underline{V}_{id} - B_{ii} \underline{W}_i + \underline{G}_i) - \frac{\partial v_i}{\partial q_\alpha} (B_{ii}^T \underline{V}_{id} - \underline{G}_{ii} \underline{W}_i + \underline{H}_i) + \frac{\partial \underline{G}_i}{\partial q_\alpha} \underline{V}_{id} - \frac{\partial \underline{H}_i}{\partial q_\alpha} \underline{W}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\xi}_i^T \underline{M} \underline{M}_i \underline{\xi}_i)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_m \frac{\partial \underline{V}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \underline{V}_i dm \right) = \sum_{\rho=1}^N A_{\alpha\rho}^{(i)} \ddot{q}_\rho + B_{\alpha\rho}^{(i)} \dot{q}_\rho \quad (21)$$

其中:

$$A_{\alpha\rho}^{(i)} = \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(m_i \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} - B_{ii} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho} + \frac{\partial \underline{G}_i}{\partial \dot{q}_\rho} \right) - \frac{\partial \underline{W}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(B_{ii}^T \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} - C_{ii} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho} + \frac{\partial \underline{H}_i}{\partial \dot{q}_\rho} \right) + \frac{\partial \underline{G}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial \underline{H}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\underline{\xi}_i^T \underline{M} \underline{M}_i \underline{\xi}_i)}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\rho}$$

$$B_{\alpha\rho}^{(i)} = \frac{\partial^2 \underline{V}_{id}^T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\rho} (m_i \underline{V}_{id} - B_{ii} \underline{W}_i + \underline{G}_i) + \frac{\partial \underline{V}_{id}^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(m_i \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial B_{ii}}{\partial \dot{q}_\rho} \underline{W}_i - B_{ii} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho} \right) + \frac{\partial \underline{W}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\rho} (B_{ii}^T \underline{V}_{id} + C_{ii} \underline{W}_i + \underline{H}_i) + \frac{\partial \underline{W}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial B_{ii}}{\partial \dot{q}_\rho} \underline{V}_{id} + B_{ii}^T \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} + \frac{\partial C_{ii}}{\partial \dot{q}_\rho} \underline{W}_i + C_{ii} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho} \right) + \frac{\partial \underline{G}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \underline{V}_{id}}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial \underline{H}_i^T}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\rho}$$

势能:

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \underline{\xi}_i^T}{\partial q_\alpha} \underline{K} \underline{K}_i \underline{\xi}_i \right) \quad (22)$$

广义力: 设作用于铰 O_i 的力矩为 \underline{L}_{R_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), 作用于 B_j 体的力为分布力 $f_i(x, t)$, 方向沿 y 轴, 即

$$\underline{f}_i = [0 \quad f_i(x, t) \quad 0]^T \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

如果 f_i 是作用于某一点 x^* 的集中力, 则可表示为

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^l \underline{f}_i^T \frac{\partial \underline{V}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} dx + L_{R_i}^T \frac{\partial \underline{W}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

5 结束语

多柔体系统集中参数模型的推导极其复杂, 本文仅讨论了近似建模的方法及 Lagrange 方程的递推表示式, 详细模型的推导手工难以完成, 借助计算机代数系统 Mathematica, 整个推导和仿真计算已形成软件系统。通过具有三个柔性杆的五体空间机械臂数字仿真表明: 该方法适合符号推演。由于数值积分与有限元拟合方法基本相同, 其精度与有限元方法相近。

参考文献

- 1 Shabana A A. Dynamics of Multibody Systems, Tohn Wiley & Sons, New york, 1989
- 2 Suleman A, Modi V J. Structural modeling issues in flexible systems, AIAA Journal, 33 (5): 919
- 3 黄圳圭, 赵志建. 大型航天器动力学与控制. 长沙: 国防科技大学出版社, 1991