

## 柔性机械手加速度反馈抑制振动的机理与稳定性分析\*

刘新建 马宏绪 张 彭

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘 要** 在柔性机械手的控制中, 末端加速度反馈是一种抑制振动有效而简便的途径。但直到现在对其抑制振动和稳定性的机理并不很清楚。本文深入系统地分析了其内在原因, 证明其反馈稳定性, 并在自行建立的柔性手实验平台上完成了实验证明, 得出了几个确定性有实际指导意义的结论。

**关键词** 柔性机械手, 加速度反馈, 振动抑制

**分类号** TP241

## Mechanism and Stability Analysis of Vibration Suppression with Acceleration Feedback for Flexible Manipulator

Liu Xinjian Ma Hongxu Zhang Peng

(Department of Automatic Control, NU DT, Changsha, 410073)

**Abstract** End-point acceleration feedback is a kind of simple and efficient method for vibration suppression of flexible manipulator, but until now the mechanism of vibration suppression and stability is not very clear. The paper has made a thorough and systematic analysis of the built-in mechanism and proved its feedback stability. Some correct and guiding conclusions have been drawn, and also verified experimentally.

**Key words** flexible manipulator, acceleration feedback, vibration suppression

柔性机械手因其结构细长和质轻的特点, 在航空航天中有重要的应用。通常的刚性控制方法使得这种细长的机械臂在运动过程中会产生较大的弯曲变形和较强的残余振动。不少学者指出非并置的传感器输出反馈使闭环控制系统不稳定, 但远离驱动器的末端加速度反馈会对柔性振动有抑制作用。本文对单杆柔性机械手的加速度输出反馈机理进行分析研究, 并证明其反馈稳定性, 完成了实验比较与验证。

## 1 柔性机械手纯弯曲振动的动力学方程

考虑图 1 所示水平面内旋转的单杆柔性机械手,  $\eta$  表示旋转坐标系对惯性坐标系  $ox_0y_0$  的刚性转角,  $w(t, x)$  表示臂上任一  $A$  点的相对柔性偏移,  $y(t, x)$  表示  $A$  点的绝对位移,  $\theta$  表示实际可测量的关节转角 (切线), 柔性机械手的柔性臂为欧拉梁, 只考虑横向弯曲振动

$$y(t, x) = x\theta(t) + w(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) q_m(t) \quad (1)$$

经过无因次化与正交化, 可导出系统在有外力矩情况下的模态坐标运动方程:

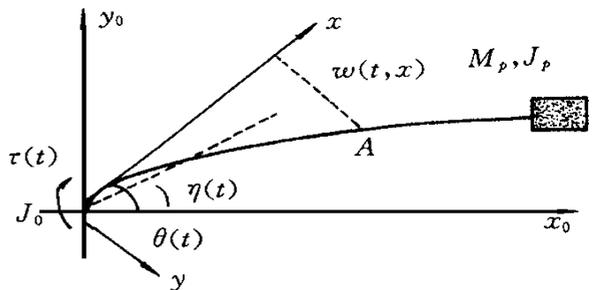


图 1 平面单杆柔性机械手

Fig. 1 One-link flexible manipulator in plane

\* 国家 863 项目资助  
1999 年 3 月 22 日收稿  
第一作者: 刘新建, 男, 1966 年生, 博士生

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = u(t) \\ \ddot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) - z_m u(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $z_m = -\frac{e}{\omega_m} \mathcal{Q}_m(0)$ ,  $e = 1 + bc + b/3, m = 1, 2, \dots$ ,

在文献 [5] 中有详细的动力学分析推导以及变量参数说明。

## 2 加速度反馈控制的抑振机理与稳定性分析

将方程 (2) 化为如下系数的状态方程:

$$\dot{X} = \Gamma \dot{X} + PX + Qu(t) \quad X, Q \in R^{(n+1) \times 1}, P, \Gamma \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (3)$$

其中,  $X(t) = [\eta(t), q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T, n$

$$P = \text{diag}(0, -\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \quad Q = (1, z_1, \dots, z_n)^T, \Gamma = (0, -2\xi_1\omega, \dots, -2\xi_n\omega)^T$$

其中,  $\xi_n$  为阻尼系数, 如果在柔性机械臂的末端安装了单自由度加速度计测量横向的末端加速度, 无因次加速度计的输出为

$$acce = \ddot{w}(l, t) + \ddot{\theta}(t) \quad (4)$$

首先考虑加速度计输出反馈, 该控制项可表示为

$$U_a = K_a [\ddot{y}(l, t) + \ddot{\theta}(t)] \quad (5)$$

其中  $K_a$  为加速度反馈增益。同时采用 PD 控制方法, 即关节位置偏差和关节角速度反馈, 实现末端的位置控制, 不失一般性, 令期望位置为零, 则总的控制量为

$$U = U_p + U_d + U_a = K_p \theta(t) + K_d \dot{\theta}(t) + K_a [\ddot{y}(l, t) + \ddot{\theta}(t)] \quad (6)$$

将 (6) 式展开得

$$U = K_p \eta + K_d \dot{\eta} + K_a \ddot{\eta} + K_p b \sum_{m=1}^n r_m q_m + K_d b \sum_{m=1}^n r_m \dot{q}_m + K_a b \sum_{m=1}^n r_m \ddot{q}_m + K_a \sum_{m=1}^n \mathcal{Q}_m(l) \ddot{q}_m \quad (7)$$

并将 (7) 分解为三部分

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (8)$$

其中,  $U_1 = K_p \eta + K_d \dot{\eta} + K_a \ddot{\eta}, U_2 = K_p b R q + K_d b R \dot{q} + K_a b R \ddot{q}, U_3 = K_a \mathcal{Q}(l) \ddot{q}$

$$\mathcal{Q}(l) = [\mathcal{Q}_1(l), \mathcal{Q}_2(l), \dots, \mathcal{Q}_n(l)], \quad R = [r_1, r_2, \dots, r_n], \quad q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T, \quad n$$

将  $U$  代入 (3) 式后, 系统方程变成:

$$[I - K_k T - K_a T] \ddot{X} + [-K_d T - \Gamma] \dot{X} + [-K_p T - P] X = 0 \quad (9)$$

令  $A = I - K_a T - K_a T, B = -K_d T - \Gamma, C = -K_p T - P$

其中, 
$$T = \begin{bmatrix} 1 & bR \\ Z^T & bZR \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{Q}(l) \\ O_{n \times 1} & \mathcal{Q}(l)^T R \end{bmatrix}$$

方程右乘一个对角矩阵  $\text{diag}[1, 1/(eb), \dots, 1/(eb)]$ , (9) 式则化为

$$A \ddot{X} + B \dot{X} + CX = 0 \quad (10)$$

如果  $K_d, K_p$  都小于0, 那么  $B, C$  都为正定矩阵, 系统的稳定性完全取决于  $A$ , 当  $A$  的行列式  $\det(A) < 0$ , 即  $A < 0$  负定, 系统肯定是不稳定的。而

$$A = \begin{bmatrix} 1 - K_a & -K_a[\mathcal{Q}(l)/b + r_1] & \dots & -K_a[\mathcal{Q}(l)/b + r_n] \\ -K_a r_1 & 1 - K_a r_1[r_1 + \mathcal{Q}(l)/b] & \dots & -K_a r_1[r_n + \mathcal{Q}(l)/b] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K_a r_n & -K_a r_n[r_2 + \mathcal{Q}(l)/b] & \dots & 1 - K_a r_n[r_n + \mathcal{Q}(l)/b] \end{bmatrix} \quad n \quad (11)$$

因此系统的稳定性与  $\mathcal{Q}_m(l)$  的符号及  $r_m = -\frac{1}{\omega_m} \mathcal{Q}_m(0), m = 1, \dots, n$  的符号有关。

可见, 柔性机械手中考虑高阶弹性模态的加速度反馈, 其增益  $K_a$  的选择较困难, 是正反馈还是负反馈, 大小为多少都难以确定, 因为加速度反馈的稳定性与向量  $\mathcal{Q}(l) = [\mathcal{Q}_1(l), \mathcal{Q}_2(l), \dots, \mathcal{Q}_n(l)], R = [r_1, r_2, \dots, r_n]$  各元素的符号有关。

由上可知,影响加速度反馈稳定性的部分完全是末端的弹性模态振动加速度部分引起的。如果只取加速度传感器输出的另一部分分量,即关节转动的刚性角加速度负反馈,  $K_a < 0$ , 这时的系统矩阵相当于变成

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 - K_a & -K_a r_1 & \dots & -K_a r_n \\ -K_a r_1 & 1 - K_a r_1^2 & \dots & -K_a r_n \\ & & \ddots & -K_a r_n \\ -K_a r_n & -K_a r_n & \dots & 1 - K_a r_n^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

其是对称的,并且因为  $K_a < 0, r_m > 0, m = 1, \dots, n$ , 容易证明系统矩阵  $A_0$  总是正定对称的。

从末端加速度计的输出信号中可以很容易用有源低通滤波器分离出低频的刚性转动加速度分量,这时的末端加速度输出反馈相当于在关节轴并置的加速度传感器输出反馈。因为  $A_0$  是对称正定的,  $B, C$  也是正定的,  $A_0^{-1}B, A_0^{-1}C$  可对称化。经过上面的分析之后,此时系统的稳定性可以用并置传感器输出反馈方法和[4]中给出的引理对下列定理给予严格证明。证明略,见文献[5]。

**定理** 单杆柔性机械手的刚性转动加速度负反馈和 PD 控制使得闭环系统是稳定的。

从(12)式看出:单杆柔性机械手的加速度反馈控制策略能有效抑制弹性模态振动的真正原因在于:低频刚性转动加速度负反馈,其在增大刚体模态运动惯性的同时,却也增大了弹性模态运动部分的惯性。

实验结果指出:弹性模态的振动加速度反馈,尤其是一阶弹性模态振动加速度反馈不利于柔性机械手系统的减振,反而容易造成不稳定。

### 3 末端加速度反馈控制的实验结果

柔性机械手实验系统见图2,柔性梁的长度1m,宽度8cm,厚度1mm,末端负载加速度计重量45g。



图2 柔性机械手实验系统

Fig. 2 The experimental system of flexible manipulator

实验记录了  $\theta_i = 60^\circ$  的如下各种控制情况下的阶跃响应。

- (1) 独立关节 PD 控制:  $K_p = 0.3, K_v = 0.1$ , 图3, 图4;
- (2) 含有弹性振动加速度成分的反馈:  $K_p = 0.3, K_v = 0.1, K_a = 25$ , 图5, 图6;
- (3) 末端刚性加速度反馈:  $K_p = 0.3, K_v = 0.1, K_a = 25$ , 图7, 图8。

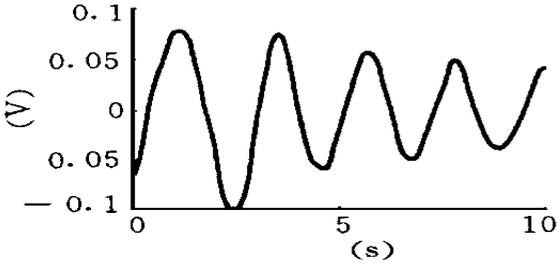


图3 关节 PD 控制的加速度响应

Fig.3 The Acceleration response of PD

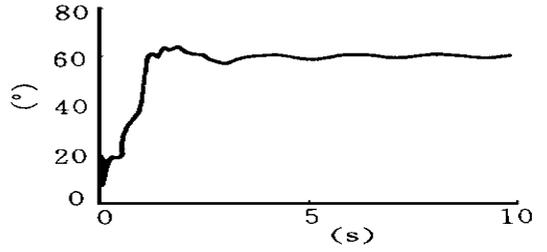


图4 关节 PD 控制的关节轨迹响应

Fig.4 The joint trajectory of PD

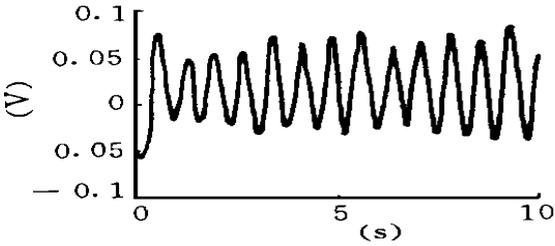


图5 含一阶振动加速度反馈的加速度响应

Fig.5 The acceleration of one mode feedback

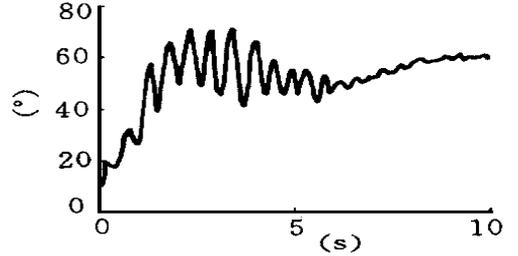


图6 含一阶振动加速度反馈的关节轨迹

Fig.6 The joint trajectory of one mode

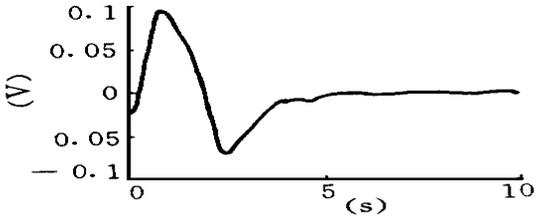


图7 末端仅含刚性加速度反馈的加速度响应

Fig.7 The response of only rigid acce. feedback

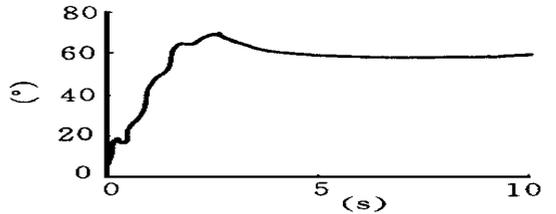


图8 末端仅含刚性加速度反馈的关节轨迹

Fig.8 The joint trajectory for rigid feedback

### 参考文献

- 1 Khorrami F S, Jain. Nonlinear control with end-point acceleration feedback for a two-link flexible manipulator: Experimental results. J. of Robotics System, 1993, 10 (4): 505 ~ 530
- 2 Khorrami F S, Jain. Experiments on Rigid body-based controlled with input preshaping for a two-link flexible manipulator. IEEE Trans. on Robotics & Automation, 1994, 10
- 3 Meinroy M E, Saridis G N. Acceleration and torque feedback for robotic control Experimental results, J. of Robotic Systems, 1992, (7) : 813 ~ 832
- 4 Tauskey. Problem. American Mathematica monthly, 1979, 66: 427
- 5 刘新建. 柔性机械手的动力学特性与控制技术研究 [博士学位论文]. 国防科技大学自动控制系, 1998