具有时间延迟的离散时间系统的 H_∞ 滤波器*

张　明　谢红卫

(国防科技大学自动控制系　长沙　410073)

摘　要　利用 MDARI(Modified Discrete Algebraic Riccati Inequality) 技术给出了具有时间延迟的离散时间系统存在 H_∞ 滤波器的充分条件和 H_∞ 滤波器设计方案, 同时给出解 MDARI 的迭代算法。

关键词　时间延迟, 离散时间系统, H_∞ 滤波器, MDARI

分类号　TP271⁺.8

H_∞ Filter for Discrete-Time System with Time Delay

Zhang Ming　Xie Hongwei

(Department of Automatic control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　This paper studies the problem of H_∞ filtering for discrete-time systems with time delay. The sufficient conditions for the existence of H_∞ filter are derived in terms of a Modified Discrete Algebraic Riccati Inequality (MDARI). Moreover the design method of H_∞ filter is obtained based on a MDARI, which may be solved by a recursive algorithm.

Key words　time delay, discrete-time system, H_∞ filter, Modified Discrete Algebraic Riccati Inequality

对于离散时间系统的状态估计问题, 如果噪声的谱密度已知, 我们可依据二次性能指标, 设计卡尔曼滤波器来估计状态; 而如果噪声的谱密度未知, 但能量有界, 我们可设计 H_∞ 滤波器来估计状态。但是实际工程系统往往存在时间延迟。对于延迟时间系统, 文[1]处理思路是把它转化为高维的无延迟系统。文[2]则直接针对延迟的离散时间系统 H_∞ 控制问题, 给出了基于 MDARE(Modified Discrete Algebraic Riccati Equation) 的设计方案。但是是否可以直接设计延迟的离散时间线性系统的 H_∞ 滤波器呢? 本文给出了肯定的回答。

为了解决具有时间延迟的离散时间线性系统的状态估计问题, 本文首先在引理中给出了延迟时间离散系统渐近稳定并且其传递函数满足 H_∞ 范数约束的充分条件, 其条件是用 MDARI 形式来表达的; 然后基于 MDARI 给出了 H_∞ 滤波器存在的充分条件和设计方案; 最后还给出了求解 MDARI 的迭代算法。下面先给出问题的描述。

考虑具有时间延迟的线性离散系统:

$$X(t+1) = AX(t) + A_dX(t-n_d) + Bw(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = CX(t) + v(t) \tag{2}$$

$$Z(t) = LX(t) \tag{3}$$

其中 $X(t)$ 为系统的状态, $Y(t)$ 为可观测的输出, $Z(t)$ 为被估计的状态, $w(t)$ 和 $v(t)$ 分别为系统噪声和测量噪声, n_d 为状态延迟步数。

设计滤波器

$$\hat{X}(t+1) = A\hat{X}(t) + A_d\hat{X}(t-n_d) + K\left(Y(t) - C\hat{X}(t)\right) \tag{4}$$

$$\hat{Z}(t) = L\hat{X}(t) \tag{5}$$

使估计误差传递函数 $T(z): \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{Z} = Z - \hat{Z}$ 满足 H_∞ 性能指标

* 1999 年 4 月 9 日收稿
第一作者: 张明, 男, 1970 年生, 讲师

$$\| T(z) \|_\infty \leq \gamma \tag{6}$$

显然,估计误差传递函数为$T(z) = L\left[zI - (A - KC) - z^{-n_d}A_d\right]^{-1}[B \quad -K]$,其状态空间形式为

$$\tilde{X}(t+1) = (A - KC)\tilde{X}(t) + A_d\tilde{X}(t-n_d) + [B \quad -K]\begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\tilde{Z}(t) = L\tilde{X}(t) \tag{8}$$

为了表述问题的方便,特引入如下定义:

定义1 对于具有时间延迟的离散时间系统(式(1)～(3))和$\gamma > 0$,如果滤波器(式(4)、(5))使得估计误差传递函数满足性能指标(6),那么称滤波器(式(4)、(5))是系统(式(1)～(3))的带有指标γ的H_∞滤波器,简称为H_∞滤波器。

本文要考察的问题可以明确表述为:对于系统(式(1)～(3))和$\gamma > 0$,存在H_∞滤波器(式(4)、(5))的条件是什么?进一步,应如何设计H_∞滤波器?

1 主要结果

引理 对于离散系统(式(1)～(3)),如果存在正定矩阵$P > 0$和$\gamma > 0$满足

$$M = Q - A_dPA_d^{\mathrm{T}} > 0 \tag{10}$$

$$N = \gamma^2 I - LPL^{\mathrm{T}} > 0 \tag{11}$$

和

$$P > APA^{\mathrm{T}} + Q + APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

这里,$Q \geq 0$,那么,系统

$$X(t+1) = AX(t) + A_dX(t-n_d) \tag{13}$$

渐近稳定,且系统(式(1)～(3))构成的传递函数$G(z) = L(zI - A - z^{-n_d}A_d)^{-1}B$满足

$$\| G(z) \|_\infty < \gamma \tag{14}$$

证明 考虑系统(13)的对偶系统

$$X(t+1) = A^{\mathrm{T}}X(t) + A_d^{\mathrm{T}}X(t-n_d) \tag{15}$$

及Lyapunov函数

$$V(X(t)) = X^{\mathrm{T}}(t)PX(t) + \sum_{l=t-n_d}^{t-1} X^{\mathrm{T}}(l)QX(l) \tag{16}$$

那么依据式(10),(15)和(16)

$$\begin{aligned}\Delta V(X(t)) &= X^{\mathrm{T}}(t+1)PX(t+1) - X^{\mathrm{T}}(t)PX(t) + X^{\mathrm{T}}(t)QX(t) - X^{\mathrm{T}}(t-n_d)QX(t-n_d) \\ &= X^{\mathrm{T}}(t)(APA^{\mathrm{T}} - P + Q)X(t) \\ &\quad + 2X^{\mathrm{T}}(t)APA_d^{\mathrm{T}}X(t-n_d) - X^{\mathrm{T}}(t-n_d)MX(t-n_d)\end{aligned} \tag{17}$$

进一步依据式(11)、(12),整理式(17)可得

$$\begin{aligned}\Delta V(X(t)) &= X^{\mathrm{T}}(t)(APA^{\mathrm{T}} - P + Q + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}})X(t) \\ &\quad - \left[M^{-1/2}A_dPA^{\mathrm{T}}X(t) - M^{1/2}X(t-n_d)\right]^{\mathrm{T}}\left[M^{-1/2}A_dPA^{\mathrm{T}}X(t) - M^{1/2}X(t-n_d)\right] \\ &< -X^{\mathrm{T}}(t)(APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA + BB^{\mathrm{T}})X(t) \\ &\quad - \left[M^{-1/2}A_dPAX(t) - M^{1/2}X(t-n_d)\right]^{\mathrm{T}}\left[M^{-1/2}A_dPAX(t) - M^{1/2}X(t-n_d)\right] \\ &\leq 0\end{aligned} \tag{18}$$

故依据Lyapunov稳定性,系统(15)渐近稳定,因而系统(13)渐近稳定。

为了证明$\| G(z) \|_\infty < \gamma$,特引入记号$z = e^{j\theta}$,$S(z) = zI - A - z^{-n_d}A_d$,则

$$G(z) = LS^{-1}(z)B$$

进一步整理不等式(12)可得

$$
\begin{aligned}
BB^{\mathrm{T}} &< P - APA^{\mathrm{T}} - Q - APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} - PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP - APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} \\
&= \bar{z}Pz - APA^{\mathrm{T}} - Q - APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} - PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP - APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} \\
&= S(z)PS^*(z) + S(z)PA^{\mathrm{T}} + APS^*(z) - APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} \\
&\quad - (Q + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} + PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP \\
&\quad - zPA_d^{\mathrm{T}}\bar{z}^{-n_d} - z^{-n_d}A_dP\bar{z} + A_dPA_d^{\mathrm{T}})
\end{aligned} \tag{19}
$$

注意到: $Q = M + A_dPA_d^{\mathrm{T}}$, 式(19)可改写为

$$
\begin{aligned}
BB^{\mathrm{T}} < S(z)PS^*(z) + S(z)PA^{\mathrm{T}} + APS^*(z) \\
- APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} - W(z)W^*(z) - T
\end{aligned} \tag{20}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
W(z) &= zPA_d^{\mathrm{T}}M^{-1/2} - z^{-n_d}M^{1/2} \\
T &= 2A_dPA_d^{\mathrm{T}} + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{21}
$$

由(20)不难得

$$
\begin{aligned}
G(z)G^*(z) &= LS^{-1}(z)BB^{\mathrm{T}}S^{-*}(z)L^{\mathrm{T}} \\
&< LPL^{\mathrm{T}} + LPA^{\mathrm{T}}S^{-*}(z)L^{\mathrm{T}} + LS^{-1}(z)APL^{\mathrm{T}} \\
&\quad - LS^{-1}(z)APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}}S^{-*}(z)L^{\mathrm{T}} \\
&\quad - LS^{-1}(z)\left(W(z)W^*(z) + T\right)S^{-*}(z)L^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{22}
$$

所以

$$
\gamma^2 I - G(z)G^*(z) > U(z)U^*(z) + LS^{-1}(z)\left(W(z)W^*(z) + T\right)S^{-*}(z)L^{\mathrm{T}} \geq 0 \tag{23}
$$

这里

$$
U(z) = N^{1/2} - LS^{-1}(z)APL^{\mathrm{T}}N^{-1/2} \tag{24}
$$

故 $\|G(z)\|_\infty < \gamma$ 得证。

定理 1　对于系统(式(1)～(3))和 $\gamma > 0$, 如果存在正定矩阵 $P > 0$ 和 $0 < \lambda < 2$ 满足式(10)、(11)和如下 MDARI:

$$
\begin{aligned}
P > APA^{\mathrm{T}} + Q + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} \\
+ PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP + BB^{\mathrm{T}} + APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} \\
+ (\lambda^2 - 2\lambda)P_+R_+^{-1}P_+
\end{aligned} \tag{25}
$$

这里

$$
R_+ = I + CPL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPC^{\mathrm{T}} + CPA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPC^{\mathrm{T}} + CPC^{\mathrm{T}} \tag{26}
$$

$$
P_+ = APC^{\mathrm{T}} + APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPC^{\mathrm{T}} + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPC^{\mathrm{T}} \tag{27}
$$

那么, 延迟系统的 H_∞ 滤波器存在; 并且让 $K = \lambda P_+R_+^{-1}$, 滤波器(4)、(5)即为所求。

证明　注意到 $K = \lambda P_+R_+^{-1}$, 并整理(25), 可得 P 满足如下代数 MDARI:

$$
\begin{aligned}
P > (A - KC)P(A - KC)^{\mathrm{T}} + (A - KC)PL^{\mathrm{T}}N^{-1}LP(A - KC)^{\mathrm{T}} + [B - K][B - K]^{\mathrm{T}} \\
+ PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP + (A - KC)PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP(A - KC)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{28}
$$

依据引理, 定理 1 得证。

注解 1: 当 $\lambda = 1$ 时, MDARI 不等式(25)变为

$$
\begin{aligned}
P > APA^{\mathrm{T}} + Q + APA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dPA^{\mathrm{T}} + PA_d^{\mathrm{T}}M^{-1}A_dP \\
+ BB^{\mathrm{T}} + APL^{\mathrm{T}}N^{-1}LPA^{\mathrm{T}} - P_+R_+^{-1}P_+
\end{aligned} \tag{29}
$$

于是可得如下推论

推论　题设如定理, 如果存在正定矩阵 $P > 0$ 满足式(10)、(11)和 MDARI(29), 其中(29)式的 P_+, R_+ 的定义式分别为(26)、(27), 那么延迟系统的 H_∞ 滤波器存在; 并且让 $K = P_+R_+^{-1}$, 滤波器(4)、(5)即为所求。

2　算法及其讨论

为了设计延迟系统 H_∞ 滤波器, 必须解 MDARI(25 或(29), 下面就给出求解(29)的迭代算法, 求解

(25)的算法思想是基本一致的。

算法: 1) 选取 $\delta > 0$, 使得 $P_0 = \delta I$; 并设置迭代最高次数 N, 及 $i = 0$.

2) 判断 P_i 是否满足 $\gamma^2 I - LP_iL^T > 0$, 是, 转移下一步; 否则令 $P_i = \alpha P_i$, 其中 $0 < \alpha < 1$, 并重新执行本步操作。

3) 求解 $P_{i+1} = f(P_i)$, 其中 $f(P) =$ (29) 式右边的表达式。

4) 判断 $P_i > P_{i+1}$ 是否成立?是, P_i 就是代数 Riccati 不等式(11)的解, 成功结束; 否则转下一步。

5) 判断 $i > N$ 是否成立? 如果成立, 搜索失败并结束, 否则转下一步。

6) 判断 $P_{i+1} > 0$ 成立否?如果成立, 并令 $i = i + 1$, 转第2步; 否则转下一步。

7) 选择 $k > 0$, 使得 $kI + P_{i+1} > 0$, 并令 $P_{i+1} = kI + P_{i+1}$; $i = i + 1$, 转第2步。

注解 2: 由 $P > 0, \gamma^2 I - LPL^T > 0$ 可知下式成立:

$$(P^{-1} - \gamma^{-2}L^TL)^{-1} = P + \gamma^2 PL^T(\gamma^2 I - LPL^T)^{-1}LP > 0$$

所以 $P^{-1} > \gamma^{-2}L^TL$, 即对于预搜索的矩阵解, 其逆存在下界; 而如果 L^TL 非奇异, 有 $0 < P < \gamma^2(L^TL)^{-1}$.

注解 3: 对于 $\forall P > 0$, $0 < \alpha < 1$, 以及固定的 $\gamma > 0$, 总可以找到 $n > 0$, 使得 $\gamma^2 I - \alpha^n LPL^T > 0$, 所以本算法第2步总是可行的。

注解 4: 当 $P > 0$ 时, $f(P) = f_+(P) - f_-(P)$

这里

$$f_-(P) = P_+ R_P^{-1} P_+ \geq 0$$

$$f_+(P) = APA^T + Q + APA_d^TM^{-1}A_dPA^T + PA_d^TM^{-1}A_dP + BB^T + APL^TN^{-1}LPA^T \geq 0$$

由于总可以找到 $k > 0$, 使得 $kI > f_-(P)$, 因此总可以找到 $k > 0$, 使得 $kI + f(P_i) > 0$.

故本算法的第3)～7)步总是可行的。

3 结论

本文利用 MDARI 技术给出了具有时间延迟系统的离散时间系统的 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 并给出解 MDARI 的简明迭代算法。

参考文献

1 Astrom K J. Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ. 1984

2 Kapila V, Haddad W M. Memoryless H_∞ Controller for Discrete-time Systems with Time Delay. Automatica, 1998, 34(9): 152～166