

# 时变结构多阶段任务系统的可靠度研究<sup>\*</sup>

谢红卫 宫二玲 贺勇军

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘要** 大型复杂系统完成规定任务往往涉及多个阶段,并且在不同的任务阶段,系统通常由其各级子系统、单元以不同的功能组合形式构成,因而,其可靠性逻辑结构(框图)也随时间的改变而改变。当连续多阶段系统不能分阶段单独处理时,将引出所谓的时段延续相关性问题。本文重点研究了时变结构多阶段任务系统的时段延续相关性问题,对典型时变结构的可靠度进行了分析,提出了有效的解决方法并建立了相应的数学模型。研究成果已应用于某大型测控系统的可靠性分析任务中。

**关键词** 任务可靠性, 多阶段任务, 时变结构

**分类号** O213.2, TP202+.1

## Study on Reliability of Phased Missions System With Time-varying Structure

Xie Hongwei Gong Erling He Yongjun

(Department of Automatic Control, NU DT, Changsha, 410073)

**Abstract** Phased missions system involves several mission phases (or stages). The stage-modulars will be relative to each other, and can not be treated independently as usual. This paper studied this problem, proposed some typical time-varying structures for phased missions system with relative stage-modulars. Using these basic structures, we can model phased missions system and compute its mission reliability exactly. The results have been used successfully.

**Key words** mission reliability, phased missions, time-varying structure

大型复杂系统通常需完成多功能、多阶段的各项任务,其不同阶段的任务通常由不同的子系统、功能单元组合完成。大型复杂系统进行可靠度综合时通常不满足子系统或模块间的独立性条件,而是涉及功能模块间的相关性问题。这种统计相关性问题有两个方面的表现,一是单元共用相关性,即同一任务时段内,部分单元在不同功能模块中共用,表现为相应方框在可靠性框图中重复出现,造成有关模块间逻辑上的不独立,不能直接采用常规的计算公式并通过模块化、层次化方法递归综合计算;另一方面是时段延续相关性,即对于多阶段任务,各单元(或模块)由于开始参与工作的时刻不同、工作时间长短不同以及连续或断续出现在各任务阶段中,造成相应的可靠性框图中部分方框重复出现在不同时间段的模块中,呈现出不同时段间的相关。

对于在确定的任务时段内,由于单元共用所引起的相关性问题,已有较多的方法加以处理,其基本思路是进行可靠性框图的等效变换或分解,以便去相关。在数学建模方法上,体现为运用全概率分解或幂等原理化简。对于结构复杂的网络系统,则先运用最小路法,再用全概率分解法(或不交化法)进行数学建模和可靠度综合,有关结论参见文献[1~3]。

而对于时段延续相关性问题,目前的研究并不多见。通常的说法是,如果任务过程中有几个工作阶段,且每个阶段又有不同的环境条件,可分别对每一阶段建立任务可靠性模型,然后利用条件概率法将各阶段可靠性模型进行再综合,得到系统总的任务可靠性模型,即分阶段单独处理再综合。然而,在实际工作中,这种分阶段建模再综合建模的策略常常是不便操作或略显粗糙的。特别是当时段延续共用单元可靠性较低时,不精确处理时段模块间相关性的细节条件,将对可靠度综合计算精度产生较大影响。

对于时段延续相关性问题,文献[4~6]中有所讨论。[4]介绍了几种近似方法,它们能给出多阶段任

\* 1999年4月6日收稿

第一作者: 谢红卫,男,1965年生,副教授

务期间系统不可靠度的上界: [5]给出了一种模型等效变换方法,它通过引入较多的虚拟单元,化多阶段任务系统为等价的确定时段任务系统。[6]研究了一种多阶段任务系统可靠度综合的数学模型,但其适用面是有局限的,一是它只考虑了时变备份结构,二是其建模的核心,即所谓  $k$  阶段单元转移概率矩阵的计算只适用于寿命分布服从无记忆分布(如指数分布)的单元或系统。

本文对多阶段任务系统时段相关性问题的研究,通过对典型时变可靠性逻辑结构的分析,推导了主要的等效简化规则和可靠度综合的计算模型,提出了一种多阶段任务系统可靠性框图等效简化的方法和数学建模方法,所建模型能准确地反映多阶段任务系统的时段间相关关系,提高可靠度综合的精度。

### 1 典型时变结构及其可靠度综合

时段延续相关性的问题在现有可靠性数学建模中考虑得较少。通常的处理方法是分阶段考虑系统可靠性或用所谓占空因子考虑设备的工作时间长短对系统可靠性的影响。对于不可分割的连续多阶段任务且不同时段内模块间逻辑关系(框图)有变化的情况,我们进行了研究,现给出如下几个典型结论。

#### 1.1 全串联模型

若系统框图模型如图 1 所示,则可看出,系统完成任务时,在不同的时段内,单元间组合形式发生了变化,系统时段模块的逻辑结构(框图)也因之而改变。经分析,我们给出等效框图如图 2 所示。

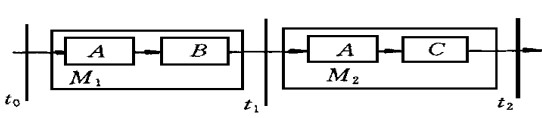


图 1 全串联系统框图模型

Fig. 1 Block model of serial system

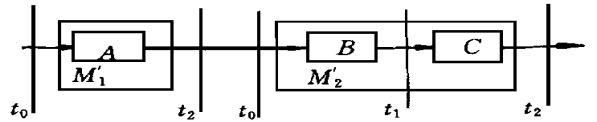


图 2 图 1 的等价模型

Fig. 2 Equivalent model of fig. 1

记  $R_s(t_0, t_1)$  为系统或单元工作时间从  $t_0$  时刻始到  $t_1$  时刻止正常工作的概率,即可靠度函数,则由图 2 可得经过时段去相关处理后的系统的可靠度函数为

$$R_s(t_0, t_2) = R_A(t_0, t_2) R_B(t_0, t_1) R_C(t_1, t_2) \tag{1}$$

当系统内时段相关性较为复杂时,直接得到等效框图模型(如图 2)或一次性列写去相关后的数学模型(如式(1))是比较困难的,为此,我们给出化简获得数学模型的一般方法:

① 在建模初期,可虚拟地视各模块彼此独立,按原始框图模型直接列写“数学模型”,并按常规运算方式展开,暂不考虑单元间的相关性。从图 1 出发,我们有:

$$\begin{aligned} R_s(t_0, t_2) &= R_{M1}(t_0, t_1) R_{M2}(t_1, t_2) \\ &= R_A(t_0, t_1) R_B(t_0, t_1) R_A(t_0, t_2) R_C(t_1, t_2) \\ &= R_A(t_0, t_1) R_A(t_0, t_2) R_B(t_0, t_1) R_C(t_1, t_2) \end{aligned} \tag{2}$$

上式中,由于蕴含相关性尚未处理,不是真正的数学模型,不能代入数值进行计算。

② 在积之和展开式中,当同一单元或模块的可靠度函数形式上做乘积时,我们采用下式化简:

当  $t_1 = t_2$  时,约定当  $A$  为同一单元时,有:

$$R_A(t_0, t_1) R_A(t_0, t_2) = R_A(t_0, t_2) \tag{3}$$

上式的意义是,同一单元在连续多时段任务中,对其可靠工作在形式上提出多次要求时,其可靠度仅计及最长工作时间,且只需计算一次,从而实现去相关。用概率事件来说明,式(3)等价于:

$$\{A \text{ 在 } t_0 \sim t_1 \text{ 期间正常}\} \cap \{A \text{ 在 } t_0 \sim t_2 \text{ 期间正常}\} = \{A \text{ 在 } t_0 \sim t_2 \text{ 期间正常}\}$$

当  $t_1 = t_2$  时,(3)式即为通常所谓的幂等化简原则。于是,(2)式对单元  $A$  去相关后,可得数学模型(1)。

③ 当形式化“数学模型”的积之和展开式中没有同一单元或模块的可靠度函数做乘积时,就得到了去相关处理后的真正的数学模型,可以进行正确的数值计算。

利用上述步骤, 我们勿需在建模全过程中不断考虑条件概率等去相关的细节问题, 而只需按我们熟悉的常规运算进行处理, 最后用(2)式所示化简原则进行化简和检查, 便能完成去相关任务, 得到正确的数学模型。

在(1)式中, 若令  $T = t_2 - t_1$  为全程工作时间,  $\beta^B = (t_1 - t_0)/T$ 、 $\beta^C = (t_2 - t_1)/T$  分别为  $B$  和  $C$  单元的所谓占空系数, 则

$$R_S(T) = R_A(T) R_B(\beta^B T) R_C(\beta^C T)$$

这便是国军标 GJB813—90 中处理过的情况。

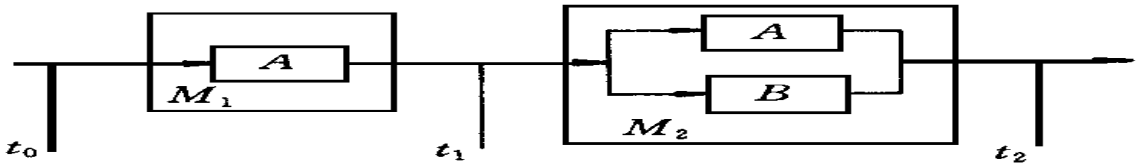


图3 时段串并联系统框图模型(单元增添)

Fig. 3 Block model of serial-parallel system (with units added)

### 1.2 时段串并联模型(单元增添)

若系统框图模型如图3所示, 则按前述步骤, 我们有系统的可靠度函数为

$$\begin{aligned} R_S(t_0, t_2) &= R_{M1}(t_0, t_1) R_{M2}(t_1, t_2) \\ &= R_A(t_0, t_1) [R_A(t_0, t_2) + R_B(t_1, t_2) - R_A(t_0, t_2) R_B(t_1, t_2)] \\ &= R_A(t_0, t_1) R_A(t_0, t_2) + R_A(t_0, t_1) R_B(t_1, t_2) \\ &\quad - R_A(t_0, t_1) R_A(t_0, t_2) R_B(t_1, t_2) \\ &= R_A(t_0, t_2) + [R_A(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_2)] R_B(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4)$$

同样, (4) 式的最后一个等式, 才是真正可计算的系统可靠度函数的数学模型。对(4)式, 我们作如下说明:

1)  $R_A(t_0, t_2)$  表示单元  $A$  在全任务段完好因而系统完好的概率。 $[R_A(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_2)]$  表示单元  $A$  在  $t_0 \sim t_1$  时段完好、 $t_1 \sim t_2$  时段有故障的概率, 这时若单元  $B$  完好, 系统仍能完成任务。而系统失败的情况将在单元  $A$  在  $t_0 \sim t_1$  时段有故障(概率为  $1 - R_A(t_0, t_1)$ ), 或单元  $A$  仅在  $t_1 \sim t_2$  时段有故障而单元  $B$  也同时有故障的条件下出现。

2) 在任务后期增添备份单元有益于提高系统可靠性。

3) 在处理时段延续相关性时, 我们引入的运算  $R(t_0, t_1) - R(t_0, t_2)$ ,  $t_1 < t_2$  是十分重要的, 也是目前可靠性数学建模工作中尚没有专门讨论过的。它不同于条件概率, 而是复合事件的真实概率, 其意义为

$$\begin{aligned} R(t_0, t_1) - R(t_0, t_2) &= [1 - R(t_0, t_2)] - [1 - R(t_0, t_1)] \\ &= P\{\text{单元在 } t_0 \sim t_2 \text{ 间故障}\} - P\{\text{单元在 } t_0 \sim t_1 \text{ 间故障}\} \\ &= P\{\text{单元在 } t_0 \sim t_1 \text{ 间完好, 在 } t_1 \sim t_2 \text{ 间故障}\} \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.3 时段并串联模型(单元删减)

若系统框图模型如图4所示, 则其等价于图5。系统可靠度函数为

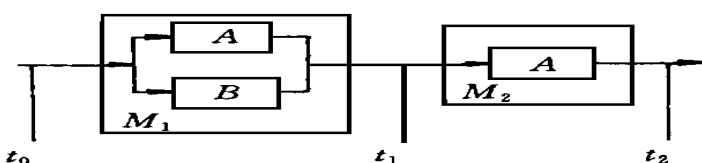


图4 时段并串联系统框图模型(单元删减)

Fig. 4 Block model of parallel-serial system (with units cancelled)

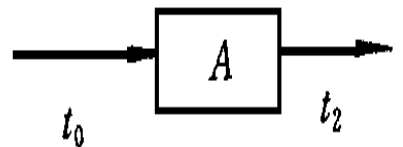


图5 图4的等价模型

Fig. 5 Equivalent model of fig. 4

$$\begin{aligned}
 R_S(t_0, t_2) &= [R_A(t_0, t_1) + R_B(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_1)R_B(t_0, t_1)]R_A(t_0, t_2) \\
 &= R_A(t_0, t_1)R_A(t_0, t_2) + R_A(t_0, t_2)R_B(t_0, t_1) \\
 &\quad - R_A(t_0, t_2)R_A(t_0, t_1)R_B(t_0, t_1) \\
 &= R_A(t_0, t_2)
 \end{aligned} \tag{6}$$

(6)式表明,若仅在任务前期提供备份单元,而在任务后期单元A变为必要单元,则前期对必要单元的备份无益于提高系统可靠性,单元B可以等效地被消隐掉。式(6)对我们进行多阶段任务系统可靠性框图简化具有重要的作用。

#### 1.4 并联接力模型

若系统框图模型如图6所示,则系统可靠度函数为

$$\begin{aligned}
 R_S(t_0, t_2) &= R_{M1}(t_0, t_1)R_{M2}(t_1, t_2) \\
 &= [R_A(t_0, t_1) + R_B(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_1)R_B(t_0, t_1)] \\
 &\quad \times [R_A(t_1, t_2) + R_C(t_1, t_2) - R_A(t_1, t_2)R_C(t_1, t_2)] \\
 &= R_A(t_0, t_2) + R_A(t_0, t_1)R_C(t_1, t_2) + R_B(t_0, t_1)R_C(t_1, t_2) \\
 &\quad - R_A(t_0, t_1)R_B(t_0, t_1)R_C(t_1, t_2) - R_A(t_0, t_2)R_C(t_1, t_2) \\
 &= R_A(t_0, t_2) + [1 - R_A(t_0, t_1)]R_B(t_0, t_1)R_C(t_1, t_2) \\
 &\quad + [R_A(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_2)]R_C(t_1, t_2)
 \end{aligned} \tag{7}$$

与(4)式类似,(7)式共有3项,分别对应于共用单元A的全程完好、早期失效和后期失效,由此可见,去相关的关键在于正确处理跨时段单元A的分阶段失效问题。

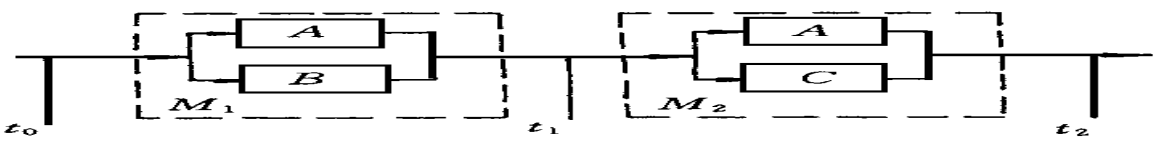


图6 并联接力系统框图模型

Fig. 6 Block model of parallel-serial system (with units continued)

## 2 时变结构多阶段任务系统可靠度综合的数学建模

前面研究了连续多阶段任务系统时段间单元连续使用、单元增添、单元删减、单元更迭等典型时变结构(框图)的可靠度综合的数学模型。在此基础上,综合利用这些基本结论,我们可以建立时变结构多阶段任务系统可靠度综合的数学模型。

在实际问题的建模过程中,我们会同时遇到单元共用相关性、时段延续相关性以及其它一些问题,必须根据具体情况加以综合处理。通过大量实践,我们认为在建模过程中可以遵循以下几个要点:

1) 应先处理时段延续相关性,然后在确定的任务时段模块内,处理单元共用相关性。

2) 时段模块、功能模块彼此独立时,可将其单独建模,然后在上一层次进行综合,即采用通常的层次化、模块化建模方法。

3) 不同时段模块的划分应以逻辑结构(框图)的改变为划分标准。当模块逻辑结构(框图)没有改变时,只需调整扩充该模块的任务工作时段,而不应当认定为不同的时段模块。

4) 应优选1.3节的典型时变结构所蕴含的消隐法则等效简化多阶段任务系统的可靠性框图,这通常能大幅度地等效简化系统可靠性框图。1.1节的典型时变结构图也能进一步简化框图。

5) 应优选多时段共用单元为突破口,按其分阶段失效情况,建立可靠度综合的数学模型。

我们以某大型测控系统可靠性综合为例,说明连续多阶段任务系统可靠度综合的数学建模过程。由于目标运动和各测量设备站址、跟踪时间长短各不相同,该系统成为连续多阶段任务系统,其可靠性逻辑结构为典型的时变结构。该系统的原始可靠性框图如图7(我们仅截取涉及时段延续相关性的片段),

其中, 单元 A、B、C、D、E 分别为光学测量或雷达测量设备。

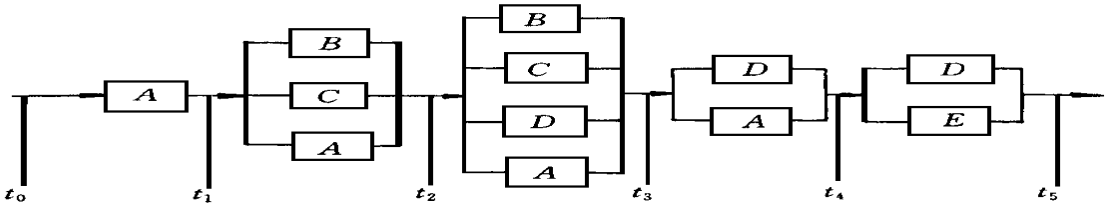


图 7 某测控系统框图模型(节选)

Fig. 7 Block model of a instrument system( adopted)

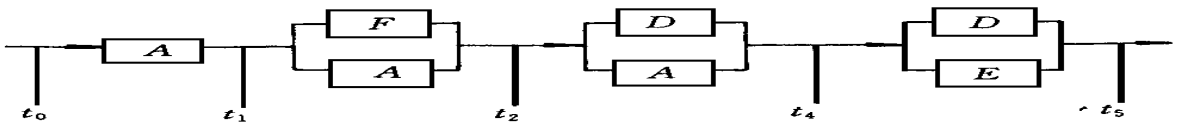


图 8 图 7 的等效模型

Fig. 8 Equivalent model of Fig. 7

首先, 从任务后期回溯, 利用 1.3 节所示结论, 可将可靠性框图等效简化为图 8 所示模型, 其中, 工作时段  $(t_2, t_3)$ 、 $(t_3, t_4)$  被调整扩充为  $(t_2, t_4)$ , F 为相同时段单元 B 和单元 C 的并联再综合模块, 而 F 模块在  $(t_2, t_3)$  工作时段的可可靠工作要求被消隐。

其次, 仍从任务后期回溯, 运用 1.4 节的结论, 我们有:

$$R_s(t_0, t_5) = R_s(t_0, t_2) \left\{ R_D(t_2, t_5) + [R_D(t_2, t_4) - R_D(t_2, t_5)] R_E(t_4, t_5) + [1 - R_D(t_2, t_4)] R_A(t_0, t_4) R_E(t_4, t_5) \right\} \quad (8)$$

展开(8)的 3 项, 前 2 项中,  $t_2$  时刻前的时段模块与  $t_2$  时刻后的时段模块独立,  $t_2$  时刻前时段模块的建模可利用 1.2 节的基本结论, 而第 3 项可利用 1.1 节的基本结论, 于是,

$$R_s(t_0, t_5) = \left\{ R_A(t_0, t_2) + [R_A(t_0, t_1) - R_A(t_0, t_2)] R_F(t_1, t_2) \right\} \times \left\{ R_D(t_2, t_5) + [R_D(t_2, t_4) - R_D(t_2, t_5)] R_E(t_4, t_5) + R_A(t_0, t_4) [1 - R_D(t_2, t_4)] R_E(t_4, t_5) \right\} \quad (9)$$

这便是图 7 所示时变结构多阶段任务系统可靠度综合的数学模型。

### 3 结论

本文研究了时变结构多阶段任务系统可靠度的综合, 通过对典型时变结构及其可靠度综合数学模型的分析研究, 提出了时变结构多阶段任务系统可靠性框图等效化简和可靠度综合数学建模的方法。该方法能精确反映时段延续相关性的细节, 且不必引入新的虚拟单元, 能进行高精度的可靠度综合。有关结论已在某大型测控系统可靠性分析任务中得到了应用。

### 参考文献

- 1 陆廷孝等. 可靠性设计与分析. 北京: 国防工业出版社, 1995
- 2 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论. 北京: 科学出版社, 1986
- 3 梅启智等. 系统可靠性工程基础. 北京: 科学出版社, 1987
- 4 Burdick G R et. al. Phased Mission Analysis: A review of new developments and an application. IEEE Transaction on Reliability, 1977, (1): 43 ~ 49
- 5 Esary J D, Ziehms H. Reliability analysis of phased missions. Reliability and fault tree analysis, 1996: 213 ~ 216
- 6 吴晗平. 多阶段任务系统的可靠度研究. 现代防御技术, 1995, (1): 32 ~ 35, 47