国 防 科 技 大 学 学 报
第21卷 第5期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 21 No. 5 1999

最小费用树*

谢 政 刘卫华 汤泽滢

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文在赋边权 w 和顶点权 θ 的网络中,建立了最小费用树问题的网络模型。文中对问题的复杂性进行了讨论并给出了求解问题的算法。

关键词 最小费用树, 近似算法

分类号 O22

Minimum Cost Tree

Xie Zheng Liu Weihua Tang Zeying

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we construct the network model of the minimum cost tree in the network with node weight function θ and edge weight w. We also discuss the complexity of the problem and give algorithms to solve the problem.

Key words minimum cost tree, approximate algorithms

1 网络模型的建立

某地区有较为发达的水上运输网,并在经济中发挥着重要的作用。但随着吞吐量的迅速增大,水运管理混乱的负面影响逐渐暴露出来。为改变河道拥挤,交通不畅及河道老化的现状,地方政府决定投资重修一些河道,使其构成四通八达的地区运输水网,并在沿途的货物集散地建立河道管理部门。现已知重修集散地之间河道的费用以及建立管理部门所需的费用和它所参与管理的河道数量的关系。问应选择何种方案,使新修河道在保证相互连通的前提下,总费用最少。为此,建立如下网络模型。

给定无向网络 $G=(V,E,w,\theta)$,其中 $w:E\to R$, $\theta: Z^+\to R$, 并记

$$\mathscr{T}=\{T \mid T \text{ 为网络} G \text{ 的支撑树}\}$$

对任意 $T\in\mathscr{T}$,定义:

$$\bar{w}(T)=\sum_{v\in V}\theta(\mathrm{d}_T(v))+\sum_{e\in E(T)}w(e)$$

如果 $T^*\in\mathscr{T}$ 且 $\bar{w}(T^*)=\min_{T\in\mathscr{T}}\bar{w}(T)$,则称 T^* 为网络 G 关于权(w,θ)的最小费用树。

针对 θ 函数的不同形式,本文将相应地进行讨论。文中涉及的概念和记号均见[1]。

2 线性顶点权最小费用树

给定网络 G 的一棵支撑树 T,一种简单的情况是 $\theta(\mathrm{d}_T(v))$ 是关于 $\mathrm{d}_T(v)$ 的线性函数,即 $\theta(\mathrm{d}_T(v))=\alpha(v)\mathrm{d}_T(v)$,其中 $\alpha(v)$ 是一个仅与顶点 v 相关的常数, $\mathrm{d}_T(v)$ 是顶点 v 在支撑树 T 中的度。下面就对这种情形进行讨论。

在网络 $G=(V,E,w,\theta)$ 中,一条边 $e=v_iv_j$ 的“总权” $\tilde{w}(e)\triangleq w(e)+\alpha(v_i)+\alpha(v_j)$,则可得新网络 $\tilde{G}=(V,E,\tilde{w})$. 对于原网络 G 的最小费用树和 $\tilde{G}=(V,E,\tilde{w})$ 的最小树,它们之间有如下关系:

定理 1 网络 $G=(V,E,w,\theta)$ 的支撑树 T 为关于权(w,θ)的最小费用树 $\Leftrightarrow T$ 为 $\tilde{G}=(V,E,\tilde{w})$ 的最小树。

---

* 国家自然科学基金资助
1999 年 3 月 18 日收稿
第一作者: 谢政, 男, 1960 年生, 副教授

证明 只须证明对任意 $T\in\mathscr{T}$,均有

$$\bar{w}_G(T)=\tilde{w}_{\tilde{G}}(T)$$

为此,任取 T 中的一条边 $e=v_iv_j$,考虑它对上式两边的“贡献”。

1°对 $\bar{w}_G(T)$ 的贡献:由 $\bar{w}_G(T)$ 的定义,$\bar{w}_G(T)=\sum_{v\in V}\alpha(v)\,d_T(v)+\sum_{e\in E(T)}w(e)$,则 e 的“贡献”为 $w_{ij}+\alpha(v_i)+\alpha(v_j)$.

2°对 $\tilde{w}_{\tilde{G}}(T)$ 的贡献:由 $\tilde{w}_{\tilde{G}}(T)=\sum_{e\in E(T)}\tilde{w}(e)$,则 e 的贡献为 $\tilde{w}_{ij}=w_{ij}+\alpha(v_i)+\alpha(v_j)$.

综合 1°,2°可知定理的结论成立。

根据定理 1,我们可以把求解网络 $G=(V,E,w,\theta)$ 的最小费用树化为求解网络 $\tilde{G}=(V,E,\tilde{w})$ 的最小树问题。采用求解最小树问题的任一算法求出网络 $\tilde{G}$ 的一棵最小树,我们就得到了网络 G 的具有线性顶点权的最小费用树。

当网络为有向网络 $D=(V,A,w,\theta)$ 且 $\theta(d_T^+(v))=\alpha(v)\,d_T^+(v)$ 时,我们可定义 $\tilde{w}(v_i,v_j)=w_{ij}+\alpha(v_i)$,把网络 D 化为 $\tilde{D}=(V,A,\tilde{w})$,并在 $\tilde{D}$ 上用朱-刘算法求出 $\tilde{D}$ 的最小树形图,即得到原网络 D 的最小费用树形图。

3 最小费用树问题是 NP 难题

在实际应用中,线性顶点权往往不能真实反映情况,因而须考虑 θ 为 $d_T(v)$ 的非线性函数的情形。

引理 1[2] 给定正整数集 S,其中 $1\in S$,且 $|S|\geq 2$,则对于任意平面图 $\bar{G}=(V,E)$,$\bar{G}$ 中是否存在支撑树 T,使得 $d_T(v)\in S(\forall v\in V)$ 是 NPC 问题。

在网络 $G=(V,E,w,\theta)$ 中,设 $|V|=n$,$|E|=m$,并限制 G 为平面图且 $w(e)$ 为常数($\forall e\in E(G)$)。对于 G 的任意一棵支撑树 T,$\sum_{v\in V}d_T(v)=2n-2$,则 $d_T(v)$ 的任意排列为不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=2n-2$ 的一个解。设 $\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$ 为问题

$$\begin{cases}\min\{\theta(x_1)+\theta(x_2)+\cdots+\theta(x_n)\}\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=2n-2\end{cases}$$

的最优解,且对应的最优值为 L,则判定问题:

在集合 $\mathscr{T}=\{T\mid T$ 为 G 的支撑树$\}$ 中,是否存在 $T\in\mathscr{T}$,使得 $\sum_{v\in V}\theta(d_T(v))\leq L$ 就等价于 G 中是否存在支撑树 T,使得 $\{d_T(v)\mid v\in V\}=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$.

由引理 1,这是一个 NPC 问题,于是有

定理 2 最小费用树问题是 NP 难题。

4 近似算法

我们知道,在取线性顶点权的情况下,θ 的形式为 $\theta(d_T(v))=\alpha(v)\,d_T(v)$,于是,如果我们把其它形式的 $\theta(d_T(v))$ 也平均分配到边上,则可得到一近似线性顶点权,这样的分配可能是 $\frac{\theta(1)}{1}$,$\frac{\theta(2)}{2}$,$\cdots$,$\frac{\theta(d_G(v))}{d_G(v)}$ 之一,将这些情况取平均值,则对应于顶点 v,取 $\tilde{\alpha}(v)=\left(\frac{\theta(1)}{1}+\frac{\theta(2)}{2}+\cdots+\frac{\theta(d_G(v))}{d_G(v)}\right)/d_G(v)$,并视其为线性顶点权系数,则取 $\theta(d_T(v))=\tilde{\alpha}(v)\cdot d_T(v)$,就把问题化为线性顶点权最小费用树问题,再用求解该问题的算法求解,即可得到一个非线性顶点权最小费用树问题的近似解。算法具体描述如下:

Step1 在网络 G 中,对每个顶点 v,求出相应的 $\tilde{\alpha}(v)$.

Step2 对网络 G 在这种近似线性顶点权情况下,利用求解线性顶点权最小费用树的任一算法,即得一近似解。

上述算法在 θ 为线性函数时,可以求得问题的最优解。

5 两个特殊的例子

如果网络 $G=(V,E,w,\theta)$ 中只含有唯一的圈 C, 则称 G 为单圈网络, 在单圈网络 G 中, 在 w 和 θ 均无任何限制时, 我们可以求得 G 的最小费用树。

设在单圈网络 G 中, $C=v_1v_2\cdots v_kv_1$ 为 G 的唯一圈, 且顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 的度分别为 $d_G(v_1)$, $d_G(v_2)$, $\cdots d_G(v_k)$. 我们知道, 此时当且仅当去掉 C 上的一条边时, 我们可以得到 G 的一棵支撑树, 而费用的改变量为 $w(e)+\theta(d_G(v_i))-\theta(d_G(v_i)-1)+\theta(d_G(v_j))-\theta(d_G(v_j)-1)$, 其中 $e=v_iv_j$, $e\in E(C)$, 并记此改变量为 $\delta(e)$, 显然, 计算所有 $\delta(e)$ 的计算量为 $O(m)$, 记 $\delta(e)(e\in E(c))$ 的最大值为 $\delta(e^*)$, 则最小费用树为 $G-\{e^*\}$.

给定网络 $G=(V,E,w,\theta)$, 我们讨论下面情况下的最小费用树:

(1) $w(e)=\text{const}=u(\forall e\in E)$.

(2) θ 函数满足 $\theta(\alpha)-\theta(\alpha-1)<\theta(\beta)-\theta(\beta-1)$, 其中 α、$\beta\in\mathbf{Z}^+$, $\beta<\alpha$. 条件(2)是因为实例中的 θ 函数一般当顶点度增大时, 关于度的均值越小, 即

$$\theta(\alpha)/\alpha<\theta(\beta)/\beta\ (\alpha>\beta)$$

进一步, 我们认为 $\theta(\alpha)-\theta(\alpha-1)$ 随着 α 的增大而减小。

(3) 网络 G 中至少有一个支配顶点, 即存在 $v\in V$, 对任意 $v'\in V\setminus\{v\}$, $vv'\in E$.

引理 2 满足条件(2)的函数 θ 具有性质: $\theta(n-1)+(n-1)\theta(1)\leq\sum_{i=1}^{k}l_i\theta(i)$, 若 $\sum_{i=1}^{k}i\cdot l_i=2n-2$, k, n, $l_i\in\mathbf{Z}^+$.

证明 把不等式展开为

$$\theta(n-1)+(n-1)\theta(1)\leq l_1\theta(1)+l_2\theta(2)+\cdots+l_k\theta(k)$$

其中 $l_1+2l_2+\cdots+kl_k=2n-2$. 则原不等式等价于

$$\theta(n-1)+(n-1-l_1)\theta(1)\leq l_2\theta(2)+l_3\theta(3)+\cdots+l_k\theta(k)$$

$$\Leftrightarrow\theta(n-1)+(n-1-l_1-l_2-\cdots-l_k)\theta(1)$$

$$\leq l_2(\theta(2)-\theta(1))+l_3(\theta(3)-\theta(1))+\cdots+l_k(\theta(k)-\theta(1))$$

$$\Leftrightarrow\theta(n-1)-\theta(n-1-l_2)+\theta(n-1-l_2)$$

$$-\theta(n-1-l_2-2l_3)+\cdots+\theta(n-1-l_2-2l_3-\cdots-(k-2)l_{k-1})$$

$$-\theta(n-1-l_2-2l_3-\cdots-(k-1)l_k)$$

$$\leq l_2(\theta(2)-\theta(1))+l_3(\theta(3)-\theta(1))+\cdots+l_k(\theta(k)-\theta(1))$$

由

$$\theta(n-1)-\theta(n-1-l_2)\leq l_2(\theta(2)-\theta(1))$$

$$\theta(n-1-l_2)-\theta(n-1-l_2-2l_3)\leq l_3(\theta(3)-\theta(1))$$

$$\theta(n-1-l_2-2l_3-\cdots-(k-2)l_{k-1}-\theta(n-1-l_2-2l_3-\cdots-(k-1)l_k)$$

$$\leq l_k(\theta(k)-\theta(1))$$

将以上各式相加, 即得

$$\theta(n-1)+(n-1)\theta(1)\leq l_1\theta(1)+l_2\theta(2)+\cdots+l_k\theta(k).$$

定理 3 在该网络中, 最小费用树是任一以某支配顶点为 '中心 '的星形图, 其费用为:

$$\theta(n-1)+(n-1)\theta(1)+(n-1)a$$

由引理 2, 上述定理显然成立。

那么, 在一个具有该种性质的网络中, 求最小费用树, 就是找一个支配顶点, 其复杂性为 $o(n)$.

参考文献

1 谢政, 李建平. 网络算法与复杂性理论 . 长沙: 国防科技大学出版社, 1995

2 Douglas R J. NP- Completness and Degree Restricted Spanning Trees. Discrete Mathematics. 105(1992) 41～47