

# 复合材料组合梁的分布参数传递函数法分析模型\*

雷勇军 李海阳 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

**摘要** 应用分布参数传递函数法分析了复合材料组合梁在轴压载荷作用下的振动与稳定性问题。通过引入对偶变量,利用 Legendre 变换和 Laplace 变换,建立了可进入 Hamilton 体系的混合能量变分原理,并推导出了结构在复频域内的状态空间控制方程,从而得到了任意边界条件下组合梁振动与稳定性问题的传递函数精确解。分析了一阶和高阶横向剪切变形、转动惯量、细长比、材料各向异性等多种因素对组合梁固有频率和屈曲载荷的影响。文中最后给出了数值算例,验证了本方法的有效性和适应性。

**关键词** 复合材料组合梁, 振动, 稳定性, 分布参数传递函数法

**分类号** O 326, TB33

## Analysis Model of Composite Combined Beams by Distributed Parameter Transfer Function Method

Lei Yongjun Li Haiyang Zhou Jianping

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In this paper, the distributed parameter transfer function method is applied to analyzing the vibration and stability of composite combined beams under axial compression. The Hamiltonian formalism of a modified mixed variational principle about the symptic variables is established using Legendre transformation with spatial variable as independent variable instead of time. The state-space equations in Laplace transform domain is derived from using Hamilton's principle and Laplace transform. The unified and closed form transfer function solutions are obtained for vibration frequencies and buckling loads under arbitrary boundary restrictions. The influences of the first and high order shear deformation, torsion deformation, rotary inertia, length-to-thickness ratio and material anisotropy on natural frequencies and buckling loads are investigated. Numerical examples are provided to demonstrate the efficiency and suitability of the methodology.

**Key words** composite combined beam, vibration, stability, distributed parameter transfer function method

航天结构中常用的复合材料梁(如许多加强框、加强筋和承力桁条等)大多采用 I、T、U、Z 等不规则的几何截面形状,并且包括横向和纵向两种铺层方式,即为组合层合梁(简称组合梁,如图 1 所示)。这些组合梁已不是单一的对称或反对称铺层结构,故经典的层合梁模型不能直接用来分析组合梁的多种力学特性。息志臣等建立了组合梁的一阶剪切变形理论模型<sup>[1]</sup>,但没有给出具体的计算与分析结果。本文采用改进的三阶剪切理论,同时考虑扭转效应的影响,建立了复合材料组合梁的分布参数传递函数法分析模型,得到了组合梁在任意边界条件下频率响应积分形式的精确解。可以用该模型分析组合梁的静动力响应、自振频率、屈曲载荷、振动与稳定性的相关性等多种问题。

## 1 分析模型

不失一般性,考虑如图 1 所示的“工字型”的组合梁,并认为腹板是纵向层,两缘板是横向层。当考虑轴向变形和扭转效应时,组合梁内任一点  $(x, z)$  的位移分量  $(u, v, w)$  可假设为如下改进的位移模式:

\* 国家自然科学基金(19572027)、国家教委优秀青年教师基金和归国留学人员基金资助项目  
1999年1月11日收稿  
第一作者:雷勇军,男,1968年生,博士

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u^0(x, t) + z\phi(x, t) + \xi(z)\psi(x, t) \\ v(x, z, t) &= z\phi_2(x, t), \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $u_0$  和  $w_0$  分别是组合梁中面 ( $z=0$ ) 沿  $x$  和  $z$  方向的位移分量,  $\phi$  和  $\phi_2$  是中面法线变形后绕  $x$  和  $y$  的转角,  $\psi$  是高级剪切变形分量。  $\xi(z) = 4z^3/3h^2$ ,  $h$  为梁的总厚度。当  $\psi = 0$  时, 对应一阶剪切理论。

组合梁任一叠层  $k$  的应力应变关系可以统一写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ Q_{13} & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad \text{记为} \quad \mathcal{Q}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (2)$$

这里  $\mathcal{Q}_k$  只是一种统一记法, 具体取值分两种情况: 当组合梁中第  $k$  层是横向层或纵向层时分别取

$$\mathcal{Q}_k = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{16} & 0 \\ \tilde{Q}_{16} & \tilde{Q}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{55} \end{bmatrix}_{(k)} \quad \text{或} \quad \mathcal{Q}_k = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 & \tilde{Q}_{16} \\ 0 & \tilde{Q}_{55} & 0 \\ \tilde{Q}_{16} & 0 & \tilde{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11} &= Q_{11} - Q_{12}^2/Q_{22}, & \tilde{Q}_{16} &= Q_{16} - Q_{12}Q_{26}/Q_{22} \\ \tilde{Q}_{66} &= Q_{66} - Q_{26}^2/Q_{22}, & \tilde{Q}_{55} &= Q_{55} - Q_{45}^2/Q_{44} \end{aligned}$$

$\tilde{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) 和  $\tilde{Q}_{lm}$  ( $l, m = 4, 5$ ) 是层合板的偏轴刚度系数。

设某一长度为  $l$  的组合梁共有  $N$  个叠层, 梁内第  $k$  层的密度、厚度和宽度分别为  $\rho_k$ 、 $h_k$  和  $b_k$ , 梁上作用有分布力  $q$ , 并受到轴向压力  $N_0$  的作用。可得到组合梁的 Lagrange 函数

$$L = U - T - W_F = \int_0^l L R dx \quad (3)$$

式中  $U$ ,  $T$  和  $W_F$  分别为组合梁的弹性势能、动能和外力功, 且

$$L_R = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{e}_1^T [(\mathbf{D} + N_0 \mathbf{p} \mathbf{p}^T) \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{D}_2 \psi - 2N_0 \mathbf{p} \phi] + D_{33} \psi^2 + N_0 \phi - \mathbf{e}^T \mathbf{m}_0 \mathbf{e} \right\} - q w_0$$

$$\mathbf{p} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T, \quad \mathbf{e} = \{w_0 \ \phi \ \phi_2 \ \psi \ w_0\}^T, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e} + \mathbf{p} \phi$$

$$D_{22} = \sum_{k=1}^N Q_{22k} \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} z^2 dy dz, \quad [A_{33}, B_{33}, D_{33}] = \sum_{k=1}^N Q_{33k} \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} [1, \theta, \theta^2] dy dz$$

$$[B_{12}, \bar{D}_{12}, D_{12}] = \sum_{k=1}^N Q_{12k} \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} [z, z\xi, z^2] dy dz$$

$$[A_{11}, B_{11}, \bar{D}_{11}, \bar{D}_{11}, D_{11}, \bar{D}_{11}] = \sum_{k=1}^N Q_{11k} \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} [1, z, \xi, z\xi, z^2, \xi^2] dy dz$$

$$[A_{13}, B_{13}, \bar{B}_{13}, \bar{B}_{13}, D_{13}, \bar{D}_{13}] = \sum_{k=1}^N Q_{13k} \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} [1, z, \xi, \theta, z\theta, \xi\theta] dy dz$$

$$[I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5] = \sum_{k=1}^N \rho_k \int_0^{h_k} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} [1, z, \xi, z\xi, z^2, \xi^2] dy dz$$

$$\mathbf{D}_2 = \{\bar{B}_{13} \ D_{13} \ 0 \ \bar{D}_{13} \ B_{33}\}^T$$

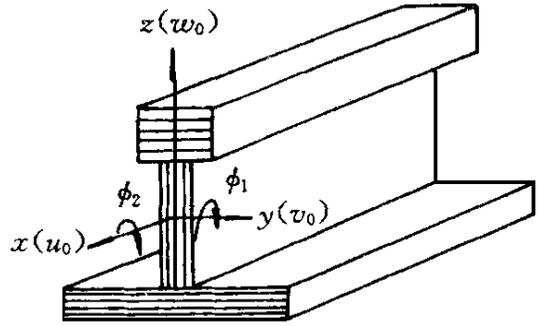


图 1 组合梁示意图

Fig. 1 Geometry of a combined beam

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{12} & \bar{B}_{11} & A_{13} \\ & D_{11} & D_{12} & \bar{D}_{11} & B_{13} \\ & & D_{22} & \bar{D}_{12} & 0 \\ & sym. & & \bar{D}_{11} & \bar{B}_{13} \\ & & & & A_{33} \end{bmatrix}, \quad m_0 = \begin{bmatrix} I_0 & I_1 & 0 & I_2 & 0 \\ & I_4 & 0 & I_3 & 0 \\ & & I_4 & 0 & 0 \\ & & & I_5 & 0 \\ & & & & I_6 \end{bmatrix}$$

$$\theta(z) = \xi(z) = \frac{4z^2}{h^2}, (\cdot) = \frac{\partial}{\partial z}(\cdot), (\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot).$$

由  $L_R$  可以得到与位移向量  $e$  相对应的广义力向量  $Q$ :

$$Q = \frac{\partial L_R}{\partial e^T} = \frac{\partial L_R}{\partial \bar{e}^T} = (D + N_0 p p^T) e_1 + D_2 \psi - N_0 p \phi \quad (4)$$

$Q$  和  $e$  是一对辛几何空间内的对偶向量<sup>[7]</sup>。进一步引入 Hamilton 密度函数  $H = Q^T \frac{d}{dx} e - L_R$ , 得

$$\bar{H} = \frac{1}{2} [(Q^T - D_2^T \psi + N_0 p^T \phi) g (Q - D_2 \psi + N_0 p \phi) - D_{33} \psi^2 - N_0 \phi^2 + e^T m_0 \dot{e}] - Q^T p \dot{\phi} - q w_0 \quad (5)$$

其中  $g = (D + N_0 p p^T)^{-1}$ 。

由 Legendre 变换, 得到以位移和相应广义力为独立变量表示的混合能量密度函数:

$$L_R = Q^T \frac{d}{dx} e - H \quad (6)$$

将 (4) 式代入上式, 进一步将  $L_R$  写成:

$$L_R = Q^T \frac{d}{dx} e - \frac{1}{2} (Q^T - e^T \alpha D_2^T + N_0 e \beta^T) g (Q - D_2 \alpha^T e + N_0 p \beta^T e) \\ + Q^T p \beta^T e + \frac{1}{2} (D_{33} e^T \alpha \alpha^T e + N_0 e^T \beta \beta^T e - e^T m_0 \dot{e}) - q e^T p$$

其中

$$\alpha = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\}^T, \quad \beta = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

根据混合能量变分原理  $\delta \int_{t_0}^t L_R dx dt = 0$ , 得到组合梁振动与稳定性分析的状态空间控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t) = F \eta(x, t) + f(x, t) \quad (7)$$

其中

$$\eta = \begin{Bmatrix} e \\ Q \end{Bmatrix} \quad C^{10 \times 1}, F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, f = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q\}^T$$

$$F_{11} = g(-D_2 \alpha^T + N_0 p \beta^T) - p \beta^T; \quad F_{12} = g$$

$$F_{21} = -(\alpha^T D_2 - N_0 \beta^T p) g (D_2 \alpha^T - N_0 p \beta^T) + D_{33} \alpha \alpha^T + N_0 \beta \beta^T - m_0 \frac{2}{t}$$

$$F_{22} = (\alpha D_2^T - N_0 \beta p^T) g + \beta p^T = -F_{11}^T$$

将方程 (7) 对时间  $t$  进行 Laplace 变换, 得到

$$\frac{d}{dx} \eta(x, s) = F(s) \eta(x, s) + \tilde{f}(x, s) + g_0(x, s) \quad (8a)$$

两端边界条件经 Laplace 变换后可以统一写成如下矩阵形式<sup>[6]</sup>

$$M(s) \eta(0, s) + N(s) \eta(l, s) = Y(s) \quad (8b)$$

$\eta(x, s)$ 、 $F(s)$  和  $\tilde{f}(x, s)$  分别是  $\eta(x, t)$ 、 $F$  和  $f(x, t)$  的 Laplace 变换, 而  $\tilde{g}_0(x, s)$  是初始条件的 Laplace 变换所得到的向量,  $Y(x)$  是由边界给定位移或力函数的 Laplace 变换组成的向量。  $M$ 、 $N$  是边界条件选择矩阵, 对固支、简支及自由等各种边界条件,  $M$ 、 $N$  ( $C^{10 \times 10}$ ) 的形式非常简单, 其元素非 0 即 1。

方程 (8) 的解是

$$\eta(x, s) = \int_0^l G(x, x, s) [\tilde{f}(x, s) + \tilde{g}_0(x, s)] dx + H(x, s) Y(s) \quad x \in (0, l) \quad (9)$$

$$\text{其中 } G(x, \xi, s) = \begin{cases} H(x, s) M(s) e^{-F(s)\xi} & \xi < x \\ -H(x, s) N(s) e^{F(s)(l-\xi)} & \xi > x \end{cases}$$

$$H(x, s) = e^{F(s)x} [M(s) + N(s) e^{F(s)l}]^{-1}$$

$G(x, \xi, s)$  和  $H(x, s)$  称为状态空间方程的传递函数矩阵。实际上, 它们就是相应物理问题的 Green 函数。

以上推导没有引入任何附加的假设与近似。因此, 通过采用传递函数方法, 得到了组合梁的静力、动力及稳定性问题的精确和封闭形式的解。对一些比较复杂的初值和边值问题, 当其他方法不能得到精确解时, 传递函数方法为寻求其精确解提供了一种途径。

利用 (8) 式可直接求解在轴力  $N_0$  作用下组合梁的自由振动频率和相应的模态振型。自振频率的特征方程为

$$\det[M(s) + N(s) e^{F(N_0, s)l}] = 0 \quad (10)$$

## 2 数值算例

作者计算了关于层合梁和组合梁大量算例, 并分析了一阶和高阶横向剪切变形、转动惯量、细长比、各向异性等多种因素对组合梁自振频率和屈曲载荷的影响<sup>[6]</sup>。这里仅给出层合梁自由振动频率计算结果。考虑由 4 个等厚层铺设而成的碳/环氧复合材料层合梁, 其材料常数:  $E_1 = 144.8 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 9.65 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4.14 \text{ GPa}$ ,  $G_{23} = 3.45 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $\rho = 1389.23 \text{ kg/m}^3$ ; 截面宽度  $b$  和厚度  $h$  均为  $0.0254 \text{ m}$ 。本文针对不同的铺设角进行分析计算, 分析中剪切变形因子  $K$  取  $5/6$ , 频率进行无量纲化

$$\tilde{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}.$$

附表给出了两种边界条件(固支-固支和固支-简支)下的角铺设( $\theta/\theta/\theta/\theta$ )细长比为  $L/h = 15$  层合梁的第一阶自由振动频率, 并与文献[2]和[3]的结果进行比较。对于对称正交铺层层合梁( $\theta = 0^\circ/90^\circ$ ), 不存在拉-弯和弯-扭耦合效应, 拉伸模态、弯曲模态和扭转模态三者之间互不耦合, 因此附表中对应这两种铺设角的三行值之间差别不大, 且本文和文[3]均给出了对应不同层合梁模型的弯曲模态的自由振动频率精确值。但对于一般对称铺层层合梁, 虽然不存在拉-弯耦合效应, 却存在弯-扭耦合效应, 因此扭转模态和弯曲模态是互相耦合的, 此时求弯曲振动频率就必须考虑扭转效应的影响。可以看出, 当  $\theta = 45^\circ$  时, 扭转变形对频率有很大影响。

附表 角铺设( $\theta/\theta/\theta/\theta$ )层合梁的自由振动频率  
Tab Nondimensional fundamental frequency of symmetric angle-ply beams

$\theta$	0	15	30	45	60	75	90
文 [3]	4.849	4.664	4.098	3.184	2.198	1.682	1.620
C-C 文 [2]	4.869	3.998	2.878	1.947	1.644	1.621	1.631
本文	4.846	3.942	2.717	1.864	1.625	1.604	1.615
文 [3]	3.731	3.559	3.057	2.303	1.551	1.175	1.131
C-S 文 [2]	3.837	3.243	2.213	1.388	1.146	1.129	1.136
本文	3.723	2.921	1.937	1.307	1.134	1.121	1.128

## 3 结论

本文利用 Laplace 变换、状态空间法和传递函数方法分析了复合材料组合层合梁的自由振动与稳定性问题, 得到了不同边界条件下组合梁振动频率和屈曲载荷的精确解。该方法具有如下特点:

(1) 采用对偶变量, 建立了可进入 Hamilton 体系的混合能量变分原理, 通过 Hamilton 正则方程, 所建立的状态空间方程, 具有“辛几何”的性质。

(2) 方法形式统一, 编程方便, 计算精度高, 边界条件适应性强, 是一种分析复合材料层合梁各种线弹性力学问题的行之有效的方法。特别适合于采用高阶剪切理论或三维弹性理论建立的层合梁模型的分析与计算。另外, 对于任意组合的边界条件以及阶梯变厚度梁, 本方法能得到形式统一的精确解。

(3) 本模型适应面宽, 可以用来分析一般层合梁(对称与非对称铺设)、组合层合梁和阶梯变厚度组合梁的静力、动力和稳定性问题。

(下转第 23 页)

子, 二氧化硅气凝胶主要起金属粒子的载体作用。值得提出的是, CO 在 Cu/SiO<sub>2</sub> 气凝胶上的完全转化温度为 150 , 该温度较文献报道的纳米铜催化剂<sup>[4]</sup>及 Cu-ZSM-5 催化剂<sup>[5]</sup>上的完全转化温度低。

### 3 结论

(1) 本文制备的金属/SiO<sub>2</sub> 气凝胶催化剂完整地保留了气凝胶的纳米网络和高比表面积, 活性组份以零价态在气凝胶中均匀分散。

(2) Cu/SiO<sub>2</sub>和 Co/SiO<sub>2</sub> 气凝胶催化剂在 CO 的氧化反应中均表现出高的催化活性, 且完全转化温度较低。

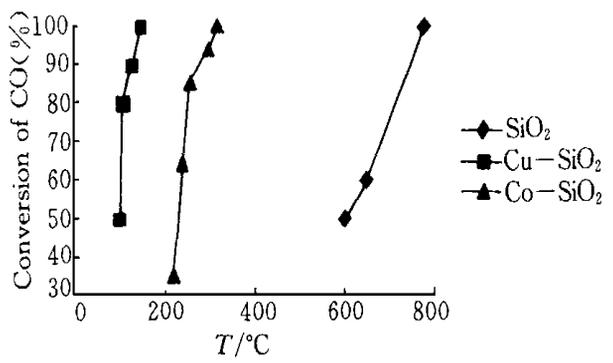


图3 金属/SiO<sub>2</sub> 气凝胶催化剂的催化活性与反应温度的关系

Fig. 3 The relationship between catalytic activity and reaction temperature

### 参考文献

- 王钰. 硅气凝胶材料的研究进展. 功能材料, 1995, 26 (1): 15
- 朱毅青, 林西平, 马延风等. 镍含量对超细粒子负载型催化剂性能的影响. 分子催化, 1998, 12 (6): 417
- 雷翠月, 陈霄榕, 张敏卿等. 溶胶凝胶法制氧化铝负载铜基超细粒子催化剂的研究. 催化学报, 1998, 12 (5): 375
- 杜芳林, 崔作林, 张志琨等. 负载型纳米非贵金属催化剂上CO的氧化行为. 分子催化, 1997, 18 (2): 102
- 林培琰, 唐靓, 陈伟等. Cu, Pd-ZSM-5 上NO分解和CO氧化的催化作用. 分子催化, 1996, 10 (4), 245

(上接第8页)

### 参考文献

- 息志臣, 陈浩然. 复合材料层合梁理论. 复合材料学报, 1994, 11 (2): 1~11
- Krishnaswamy S, Chandrashekhara K, Wu W Z B. Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams. Journal of Sound and Vibration, 1992, 159 (1): 85~99
- Chandrashekhara K, Krishnamurthi K, Roy S. Free vibration of composite beam including rotary inertia and shear deformation. Computer and Structures, 1990, 14: 269~279
- Abramovich H, Eisenberger M, Shulepov O. Vibration and buckling of cross-ply nonsymmetric laminated composite beam. AIAA Journal, 1996, 34 (5): 1064~1069
- Zhou Jianping (周建平), Yang B. A distributed transfer function method for analysis of cylindrical shells. AIAA Journal, 1995, 33 (9): 1698~1708
- 雷勇军. 结构分析的分布参数传递函数法: [学位论文]. 国防科技大学航天技术系, 1998
- 钟万龠. 弹性力学求解新体系. 大连理工大学出版社, 1995
- 李海阳, 周建平, 冯志刚. 变截面梁的数值传递函数解法. 国防科技大学学报, 1999, 21 (4): 22~25