

## 噪声图像压缩编码的小波变换方法\*

沈建军 涂丹 沈振康

(国防科技大学电子技术系 长沙 410073)

**摘要** 基于小波变换理论,研究小波变换域噪声图像的压缩编码方法,以实现在小波变换域同时达到对图像噪声的去除与图像压缩编码的目的,并且使两者均获得较好的效果。最后给出的实验结果证明了本文方法的有效性。

**关键词** 小波变换,去噪,收缩,压缩编码,零树

**分类号** TN919.81

## The Methods of Noise Image Compression and Coding Through Wavelet Transform

Shen Jianjun Tu Dan Shen Zhenkang

(Department of Electronic Technology, NU DT, Changsha, 410073)

**Abstract** Based on the wavelet transform theory, this paper researches into the method of noise image compression and coding in wavelet transform domain, which removes the noise and compresses and encodes the image in wavelet transform domain simultaneously, and obtains good effects in both respects. The experimental results given at the end of this paper demonstrate the effectiveness of our algorithm.

**Key words** Wavelet Transform, Noise Removal, Shrinkage, Compression and Coding, Zerotree

图像压缩编码是一项广泛应用的技术。对于多媒体通信、可视电话等系统的实现,图像压缩编码技术中起着关键的作用。近年来,小波变换<sup>[1][2][3]</sup>作为一种新的信号分析技术,由于其良好的时间-频率局部化特性,使得其更加适合于对信号的表示,从而被较好地应用于瞬变信号检测、图像压缩编码等许多信号处理领域。

然而在图像压缩编码的应用中,由于图像中往往含有噪声(本文中为高斯白噪声),而噪声表现为高频特性,因此图像经小波变换后,噪声的存在将降低图像的压缩编码效率,并且最后的结果也不是我们所需要的,因为噪声在编码过程中被较好地保留下来。因此,在本文中,希望能在小波变换域中,同时实现对图像噪声的去除与压缩编码,即首先对图像小波变换域系数进行去噪处理以实现噪声的清除,然后再对经过去噪处理后的小波变换域系数进行压缩编码,从而实现整个过程。比较重要的一点是:为使两者均取得较好的效果,就需要小波变换系数经过去噪处理后,不影响或不降低压缩编码所能取得的压缩率,因为图像压缩编码的目的就是为获取尽可能高的压缩率。这就要求所用的压缩编码方法与去噪方法应存在一种相辅相成的关系。

## 1 图像的小波变换

给定一信号  $f(t) \in L^2(R)$ , 其连续小波变换定义为:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad (1)$$

式中  $\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  为小波函数,它实际上是由一个母小波函数  $\Psi(t)$  通过伸缩与平移得到的,其中  $a$  是伸缩因子,  $b$  是平移因子。由于  $a, b$  是连续的,因此小波变换存在着很大的冗余性,在实际应用中常对  $a, b$  进行  $a = 2^{-j}$ ,  $b = k2^{-j}$  方式的离散化,从而得到信号  $f(t)$  的小波级数表示式:

\* 1999年2月20日收稿  
第一作者:沈建军,男,1971年生,博士生

$$f(t) = \sum_j \sum_k c_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \tag{2}$$

其中  $\Psi_{j,k}(t)$  表示  $\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$  的对偶,  $j, k \in Z$ 。

(2) 式中小波级数的系数为:

$$c_{j,k} = \int f(t) \overline{\Psi_{j,k}(t)} dt \tag{3}$$

由于  $\Psi_{j,k}(t)$  中  $j$  的变化代表着其频率的变化, 因此可见, 信号  $f(t)$  的小波级数展开式将信号分解到了不同的频段(由下标  $j$  体现), 而每个频段中的系数又表示了信号的时域信息(由下标  $k$  体现), 并且其时域取样步长是随频率的高低而变化的, 小波变换的优越之处就在于其具有这样的时间-频率局部化性质。

由于实际中处理的是离散信号, 因此运用 Mallat 算法<sup>[3]</sup>, 有离散小波变换式

$$c_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n} h(n - 2k) \tag{4a}$$

$$d_{j,k} = \sum_n c_{j+1,n} g(n - 2k) \tag{4b}$$

其重构公式则为:

$$c_{j+1,n} = \sum_k c_{j,k} \tilde{h}(n - 2k) + \sum_k d_{j,k} \tilde{g}(n - 2k) \tag{5}$$

在上面式子中,  $h(n)$  与  $g(n)$  是分析小波滤波器组,  $\tilde{h}(n)$  与  $\tilde{g}(n)$  则是综合小波滤波器组。对于由 (4a) 得到的  $c_{j,k}$  可按式 (4a)、(4b) 再进行小波变换以得到高阶小波变换。设在  $j = J_0 - 1, J_0 - 2, \dots, J_m$  进行了小波变换, 其中  $J_0$  代表初始系数的频段,  $J_m$  代表第  $m$  次小波分解后系数的频段, 初始  $c_{J_0,n}$  为信号  $f(n)$ 。由于  $h(n)$  是低通滤波器,  $g(n)$  为高通滤波器, 因此从 (4a) 与 (4b) 式可以看出, 信号每经一次小波分解后就被分成一个低通分量和一个高通分量, 对低通分量进一步进行小波分解后又分成一个低通分量和一个高通分量。这样, 经  $m$  次小波分解后, 最后得到一个低通分量  $c_{J_m,k}$  和一系列高通分量  $d_{j,k}, j = J_0 - 1, J_0 - 2, \dots, J_m$ , 可知  $j$  越大表示这个分量其频率越高。

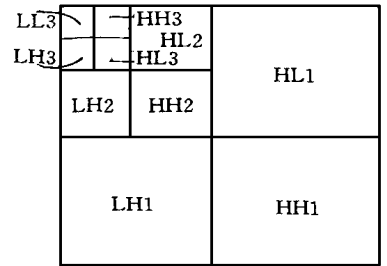


图1 图像的三阶小波变换示意图  
Fig.1 The three octave wavelet transform of image

对于图像信号, 由于其二维的, 因此图像的离散小波变换需要在行和列上分别进行一次一维小波变换。这样, 图像经过一阶小波变换后, 被分解成一个低通分量(LL)和三个高通分量(HL、LH、HH), 对低通分量进一步进行小波分解后又被分成一个低通分量和三个高通分量。图1是图像经过三阶小波变换后的示意图。

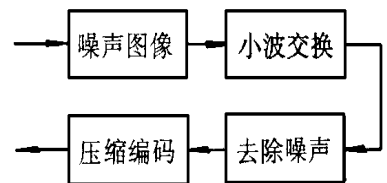


图2 噪声图像压缩编码过程  
Fig.2 The process of noised image compression and coding

图像经小波变换后, 首先对其小波变换域系数进行去噪处理, 然后再进行压缩编码, 其简要过程如图2所示。

## 2 小波变换域图像去噪

设原始图像数据为  $f(m, n)$ , 其含有噪声, 模型为

$$y(m, n) = f(m, n) + \sigma n(m, n) \quad 0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1 \tag{6}$$

式中  $n(m, n)$  为标准高斯白噪声,  $\sigma^2$  为图像噪声的方差,  $M, N$  为图像的尺寸。可以认为在下式达到最小的情况下, 噪声已被有效地去除:

$$E \|f - \hat{f}\|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} E [f(m, n) - \hat{f}(m, n)]^2 \tag{7}$$

式中  $\hat{f}(m, n)$  表示经过小波变换域去噪后恢复的图像。然而, 要使(7)式达到确切的最小是非常困难的, 在实际中常将(7)式放大到某个上界(这上界随不同的去噪方法而不同), 从而得到一个小于上界的近似最好解  $\hat{f}(m, n)$ 。

考虑到图像每次小波分解后产生四个分量, 因此为描述方便, 将噪声图像每次小波分解后的的三个

高频分量  $d_{j,(k,l)}^{LH}$ 、 $d_{j,(k,l)}^{HL}$ 、 $d_{j,(k,l)}^{HH}$  分别用  $wy^{(j,1),(k,l)}$ 、 $wy^{(j,2),(k,l)}$ 、 $wy^{(j,3),(k,l)}$  表示,  $j = J_0 - 1, J_0 - 2, \dots, J_m$ , 而最后的低频分量  $c_{J_m,(k,l)}$  则用  $wy^{(J_m,0),(k,l)}$  表示, 下标  $(k, l)$  表示小波变换系数是二维的(因为图像是二维的)。由于噪声表现为高频特性, 因此得到  $f(m, n)$  较简单的方法是运用线性去噪方法, 即将噪声图像  $y(m, n)$  的小波变换域系数中的某些高频成分去掉, 然而, 由于图像中的边缘等部分相当于高频信号, 并且低频系数中也含有噪声, 因此线性去噪方法不能获得较好的去噪效果, 为此, 我们也运用非线性去噪方法<sup>[4][5]</sup>, 定义收缩算子:

$$s_{\lambda}(c) = \begin{cases} c - \lambda & c > \lambda \\ 0 & |c| \leq \lambda \\ c + \lambda & c < -\lambda \end{cases} \quad (8)$$

式中  $\lambda$  为一待定收缩阈值, 对  $wy^{(j,j_1),(k,l)}$  施加收缩运算:

$$wy^{(j,j_1),(k,l)} = s_{\lambda}(wy^{(j,j_1),(k,l)}) \quad (9)$$

其中  $J_m - j < J_0, 0 \leq j_1 < 4$ , 由  $wy^{(j,j_1),(k,l)}$  进行小波重构即得到非线性去噪后的图像  $f(m, n)$ 。然而, 发现由(8)式与(9)式得到的非线性去噪图像  $f(m, n)$ , 其质量仍不太令人满意, 原因是(9)式中它对所有频段中的小波系数均采用了一个相同的收缩阈值  $\lambda$ 。为获得较好的去噪效果, 修改(9)式为:

$$wy^{(j,j_1),(k,l)} = \begin{cases} wy^{(j,j_1),(k,l)} - \frac{\lambda}{2^{j\sigma_j}} & wy^{(j,j_1),(k,l)} > \lambda \\ 0 & |wy^{(j,j_1),(k,l)}| \leq \lambda \\ wy^{(j,j_1),(k,l)} + \frac{\lambda}{2^{j\sigma_j}} & wy^{(j,j_1),(k,l)} < -\lambda \end{cases} \quad (10)$$

非线性去噪中一个比较重要的因子是确定收缩阈值  $\lambda$ 。前面已经提到, 由于在实际中是对(7)式给出一个上界, 因此对  $\lambda$  值的确定就有较大的自由度, 在本文中, 我们取其<sup>[4]</sup>:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log 10(M \times N)}$$

### 3 小波变换域图像压缩编码

小波变换域系数经过去噪处理后, 再对其进行压缩编码。压缩编码的目的是为获取较高的图像压缩率与较好的编码质量。压缩方法也可分为线性压缩与非线性压缩两类, 由于线性压缩方法只编码某些低频系数, 在效果上并不好, 故采用非线性压缩方法, 其编码下列小波系数:

$$wy^{(j,j_1),(k,l)} = wy^{(j,j_1),(k,l)} \quad |wy^{(j,j_1),(k,l)}| > \lambda \quad (11)$$

而其余系数则作零处理。

利用零树编码方法<sup>[6]</sup>来实现非线性压缩编码, 并结合运用自适应算术编码<sup>[7]</sup>。零树编码的简要过程为: 建立两张表(主表与副表), 初始主表即由图像的小波变换系数组成, 选择一个初始门限值  $T_0$  后, 扫描主表中的子树以判别主表中有意义的点(即其系数绝对值大于  $T_0$ ), 然后将有意义的点从主表中去除并将该点移至副表, 扫描副表以判别系数绝对值是位于  $[T_0, T_0 + T_0/2]$  区域或是  $[T_0 + T_0/2, 2T_0]$  区域。这样, 经过一轮扫描后将门限值降低一半(即令  $T_0 = T_0/2$ )再次以相同方法扫描主表与副表, 循环这个过程直到满足要求为止。

从(10)式可以看出, 由于小波变换系数经过去噪处理后, 绝对值小于、等于收缩阈值  $\lambda$  的系数均已被置为零, 而其余绝对值大于收缩阈值  $\lambda$  的系数被至多收缩了  $\lambda/2$ , 因此, 在零树编码的过程中, 当主表经过多次扫描后, 当其门限值  $T_0$  小于、等于阈值  $\lambda/2$  时, 就无需再次进行扫描与编码, 因为此时所有的小波系数值相对于  $T_0$  均已为无意义。因此, 文中的非线性去噪方法对获取较高的压缩率是不影响的, 实际上还能促进压缩率的提高。

### 4 实验结果

实验中所用的小波滤波器为 Daubechies 9/7 点双正交小波滤波器组, 其冲激响应序列见文[8], 运

用上述方法对许多图像进行了压缩编码并实现去噪,均取得了很好的效果。下面给出关于对 goldhill 图像的实验结果。原始 goldhill 图像示于图 3a, 尺寸为  $512 \times 512$ , 256 灰度级, 图 3b 是一幅加了高斯白噪声后的图像, 其中噪声方差为 200, 图像 PSNR 为 25.378, 图 3c 则是对其经本文方法去噪与压缩编码后的图像, 其中压缩率为 35.19 倍, 图像 PSNR 为 28.547。在实验结果中, 峰值信噪比 PSNR 定义为:

$$\text{PSNR} = 10 \log \frac{255 \times 255}{\frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} [f(m, n) - \hat{f}(m, n)]^2} \quad (12)$$

其中,  $f(m, n)$  表示原始图像,  $\hat{f}(m, n)$  表示当前待评价的图像。



(a) 原始 goldhill 图像 (b) 加高斯白噪声后的图像 (c) 去噪与压缩编码后的图像  
(a) The original goldhill image (b) The image after adding gaussian white noise (c) The image after noise-removed and compressed and coded

图 3 实验所用图像与结果

Fig. 3 The image used in experiment and the result

表 1 给出了一些具体的实验数据。从表 1 中可以看出, 本文方法不仅取得了较高的图像压缩率, 而且较好地去除了图像中的噪声。为了表明小波变换方法在同时实现图像去噪与压缩编码中的优越性, 在表 1 中也给出了利用 JPEG 方法得到的图像去噪与压缩编码的实验结果。JPEG 方法是目前静止图像压缩编码的标准方法, 它利用的是离散余弦变换(DCT), 由于 DCT 变换只有频率局部性, 而没有时间局部性, 因此在 DCT 域不能应用像小波变换域中运用的阈值收缩去噪方法, 考虑到噪声的高频特性, 对其应用了低通滤波的去噪方法。

表 1 goldhill 图像的去噪与压缩编码结果

Tab. 1 The result of goldhill image after noise-removed and compressed and coded

	噪声方差	噪声图像 PSNR	去噪与压缩编码后图像的 PSNR		压缩倍数*	
			小波变换	JPEG	小波变换	JPEG
实验 1	100	28.474	29.450	29.330	31.36	12.59
实验 2	200	25.378	28.547	27.809	35.19	17.84
实验 3	300	23.591	27.182	26.215	76.40	34.05
实验 4	400	22.335	26.985	25.922	77.01	35.19

\* 压缩倍数定义为原图像字节数除以压缩编码后的字节数

从表 1 中的实验数据可以看出, 由小波变换方法得到的图像 PSNR 与压缩倍数均要高于 JPEG 方法, 这说明了小波变换域图像去噪与压缩编码效果要优于标准的 JPEG 方法, 这也说明了传统的方法在同时实现图像去噪与压缩编码中的缺陷性。

以上实验表明, 本文的图像去噪与压缩编码方法是有效的, 它在小波变换域同时完成了图像的去噪与压缩编码, 并且使两者都取得了较好的效果, 从而克服了在实际应用中噪声对图像编码结果与压缩率的影响。另外, 虽然小波变换域图像去噪与压缩编码的理论比较复杂, 但可以看出其实现却是很容易的, 可以很方便地用软件或硬件完成, 具有很强的实用性。

(下转第 67 页)

低约 26dB, 从图 4 明显可以看出: 一方面最高的杂散电平降低了约 30dB, 另一方面低噪声却增加了。

## 4 结束语

本文着重分析了改善输出频谱结构的数字方法——相位抖动法, 得出结论: 若给累加器加入适当的抖动信号, 可使杂散的抑制从每相位位 6dB 增加到每相位位 12dB, 因而这种方法能较好的改善 DDS 的输出频谱。

## 参考文献

- 1 Sripad A B, Snyder D L. A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White. IEEE Trans. on Acoust. Speech and signal Processing, 1997: ASSP-25
- 2 Gray R M, Stockham T G. Dithered Quantizers. IEEE Trans. On Inform, Theory, 1993: 39
- 3 Michael J. Flanagan, George A. Zimmerman. Spur-reduced Digital Sinusoid Synthesis. IEEE Trans. on Communications, 1995: 43
- 4 Nichols T, Samueli, H. An Analysis of the Output Spectrum of Direct Digital Frequency Synthesizers in the Presence of Phase Accumulator Truncation, 41st. Frequency contrl symposium, 1997
- 5 Robert M. Gray. Quantization Noise spectra, IEEE Trans. on Information Theory 1990: 36

(上接第 58 页)

## 参考文献

- 1 Daubechies I. Ten Lectures On Wavelets. Rutgers University and AT&T Bell Laboratories, 1992
- 2 Vetterli M and Herley C. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design. IEEE Trans. on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207 ~ 2232
- 3 Mallat S G. A Theory For Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. on Patt. Anal. and Machine Intell., 1989, 11(7): 674 ~ 693
- 4 Donoho D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. Biometrika, 1994, 81: 425 ~ 455
- 5 Chambolle A, DeVore R A, Lee Nam-yong, Lucier B J. Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal Through Wavelet Shrinkage. IEEE Trans. on Image Processing, 1998, 7(3): 319 ~ 335
- 6 Shapiro J M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients. IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, 41(12): 3445 ~ 3462
- 7 Witten I H, Neal R and Cleary J G. Arithmetic Coding for Data Compression. Comm. ACM, 1987, 30: 520 ~ 540
- 8 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P and Daubechies I. Image coding using wavelet transform. IEEE Trans. on Image processing, 1992, 1: 205 ~ 220