

一种抑制相位截断误差引起的杂散分量的方法*

李琳 邹涛 王松 张尔扬

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

摘要 文中介绍了一种抑制直接数字频率合成(DDS)时由相位截断误差引起的杂散分量的方法——相位抖动法。这种方法通过给相位累加器加入抖动,来打乱相位截断误差序列的周期性,将其变为随机序列,这样就使原来由于误差序列周期性引起的有规律的杂散分量变为幅度较低的随机相位噪声,从而降低了输出的杂散信号电平与有用信号的电平之比,达到改善输出频谱特性的目的。本文对该方法做了深入的分析,给出了分析结果,最后用仿真手段验证理论分析结果。

关键词 直接数字频率合成, 相位截断, 抖动

分类号 TN74

A Technique of Suppressing Spurs Caused by Phase Truncation Error

Li lin Zhou tao Wang song Zhang eryang

(Institute of Electronic Engineering, NU DT, Changsha, 410073)

Abstract This paper presents a dither technique for suppressing spurs in DDS. This technique converts the phase truncation error sequence into a random sequence by adding dither to the phase accumulator, destroys the period of phase truncation error sequence, and turns the discrete line spurs into random noise, which obtains the improvement of the DDS output spectrum at last. The technique is analysed, the results of this analysis is presented and confirmed by simulation.

Key words DDS, phase truncation, dithering

DDS 是一种基于波形存储的全新频率合成技术,与传统的频率合成技术相比,它具有众多优点,然而相位截断误差序列的周期性是造成 DDS 输出频谱中含有大量的杂散分量的主要根源之一,杂散幅度较高一直是限制其发展及应用的主要因素。目前,DDS 的低杂散设计方法主要可分为两类:一类是优化波形存储表,最为典型的是 Sunderland 等人所提出的 Sunderland 结构;另一类方法通过修正 DDS 结构,来降低输出信号的杂散分量。本文介绍的抖动法通过有效修正 DDS 的相应环节,来改善其输出频谱结构,理论分析和仿真结果表明,这种结构能有效的改善 DDS 的频谱特性。

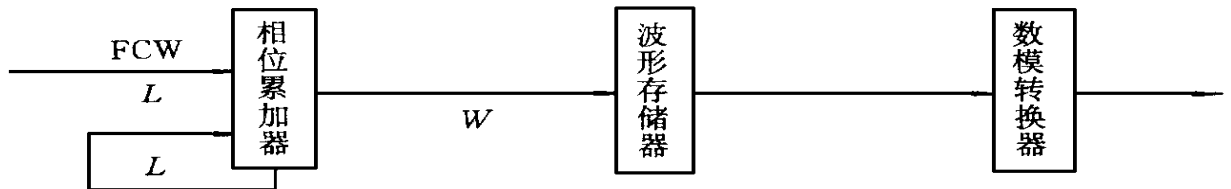


图1 DDS的原理框图

Fig. 1 DDS Block Diagram

1 相位截断误差分析

图1为DDS的原理框图。从其结构知,引起杂散的三个主要来源为:(1)在实际应用中,为压缩ROM的容量,只用L位相位累加器的W个高有效位去寻址波形存储器,将低有效位截去,从而产生了

* 1998年4月29日收稿
第一作者:李琳,女,1976年生,硕士生

相位截断误差 $\epsilon(n)$; (2) ROM 表存储的 SIN 值为有限字长,从而产生了幅度量化误差; (3) DAC 的非理想特性。由于幅度量化误差的影响远小于另外两种误差,而且目前还没有很好的方法可以精确算出 DAC 非理想特性带来的频谱杂散,因而本文对相位截断引起的杂散问题的讨论是在假定不存在另外两种引起杂散的因素的前提下进行的。

$$\text{若记 } B = L - W, \text{ 则 DDS 的输出为: } s(n) = \sin\left(2\pi \frac{2^B}{2^L} \left\lfloor \frac{F_{cw}n}{2^B} \right\rfloor\right) \quad (1)$$

其中 F_{cw} 为频率控制字,符号 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算。

$$\text{上式还可表示为: } s(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{2^L}(F_{cw}n - \epsilon_p(n))\right) \quad (2)$$

$$\text{其中 } \epsilon_p(n) \text{ 为相位截断误差序列,且其表式为: } \epsilon_p(n) = F_{cw}n - 2^B \left\lfloor \frac{F_{cw}n}{2^B} \right\rfloor \quad (3)$$

易知, $\epsilon_p(n)$, $s(n)$ 的周期分别为 $2^B / (2^B, F_{cw})$, $2^L / (2^L, F_{cw})$, 其中 (\cdot) 表示取两个数的最大公约数。由信号处理理论知, $\epsilon_p(n)$, $s(n)$ 的频谱以 F_{clk} 为周期, 在 $[0, F_{clk}/2]$ 内, $\epsilon_p(n)$ 的频谱由 $2^{B-1} / (2^B, F_{cw})$ 根离散谱线组成, $s(n)$ 的频谱由 $2^{L-1} / (2^L, F_{cw})$ 根离散谱线组成, 其它区间的分布可通过周期性得到。由参考文献[4]知, $\epsilon_p(n)$ 的级数展开为:

$$\epsilon_p(n) = \sum_{k=1}^{\Lambda} \xi_k \exp\left[j\left(2\pi k \frac{F_{cw}n}{2^B}\right)\right] \exp(j\Psi(k, \Lambda)) \quad (4)$$

$$\text{其中 } \Lambda = \frac{2^{B-1}}{(2^B, F_{cw})}, \xi_k = \frac{2^B}{2\Lambda} \operatorname{csc}\left(\frac{k\pi}{2\Lambda}\right), \Psi(k, \Lambda) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{k\pi}{2\Lambda}\right)$$

将 $\epsilon_p(n)$ 代入(2)式,再利用小角近似(当 x 很小时, $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$), 可推出在 $[0, F_{clk}/2]$ 内, $s(n)$ 的杂散分布为:

$$f_{k\pm} = \min[\langle kF_{cw}2^{L-B} \pm F_{cw} \rangle / 2^L, 1 - \langle kF_{cw}2^{L-B} \pm F_{cw} \rangle / 2^L] F_{clk} \quad (5)$$

而 $f_{k\pm}$ 的幅度为:

$$\rho_k = \frac{\pi}{2^L} \xi_k = \frac{\pi 2^{B-L}}{2\Lambda} \operatorname{csc}\left(\frac{k\pi}{2\Lambda}\right) \quad (6)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, \Lambda$ 。(符号 $\langle x \rangle_y$ 表示 $x \bmod y$)

由(6)式知: 在 $[0, F_{clk}/2]$ 内, $s(n)$ 的频谱最多只有 $2\Lambda + 1$ 根谱线的幅度不为 0, 而最大杂散在 $k=1$ 处, 其幅度为: $\rho_1 = \frac{\pi 2^{B-L}}{2\Lambda} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2\Lambda}\right) = 2^{B-L} \frac{\pi(2^B, F_{cw})}{2^B} \left| \sin\left(\frac{\pi(2^B, F_{cw})}{2^B}\right) \right|$ (7)

由于 $(F_{cw}, 2^B) = 2^B$ 对应无相位截断情况, 故 $(F_{cw}, 2^B) = 2^{B-1}$ 时上式取得最大值, 也即 ρ 介于 2^{B-L} 与 $2^{B-L} \pi/2$ 之间。从可得主谱与最强杂散的幅度之比为:

$$6.02(L - B) - 3.92 \quad \rho(\text{dB}) < 6.02(L - B)(\text{dB}) \quad (8)$$

可见舍位位数每减少 1 位, 能改善杂散约 6 dB, 但增加寻址位数, 随之而来就对 ROM 的容量提出了较高要求, 实现起来有一定困难。本文介绍的抖动法通过有效修正 DDS 的相应环节, 来改善其输出频谱结构。下面就对该方法做简要阐述。

2 抖动量化原理及相位抖动法分析

所谓抖动量化即在量化器的原始输入 v_n 中加入适当的抖动信号 w_n , 若 w_n 满足^[5]:

(1) 量化器未过载, 也即 $v_n + w_n \in \left[-\frac{M\Delta}{2}, \frac{M\Delta}{2}\right]$ (M 为量化级数, Δ 为量化阶距);

(2) w_n 与 v_n 独立, w_n 是一个独立同分布过程;

(3) w_n 的特征函数满足 $\Phi_w(j2\pi l/\Delta) = 0 \quad l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ($\Phi_w(0) = 1$) (9)

则量化误差 e_n 满足:

(1) e_n 与原始输入 v_n 独立;

(2) e_n 在区间 $[-\Delta/2, \Delta/2]$ 均匀分布, 是一个独立同分布序列。

而此时的量化噪声 $\epsilon_n = e_n + w_n$ 满足:

(3) ϵ_n 与 v_n 不相关(“线性独立”)即: $E(\epsilon_n v_m) = E(\epsilon_n) E(v_m)$;

(4) 序列 ϵ_n 是不相关的(白色的), 也即其自相关具有以下形式:

$$R_\epsilon(n, m) = E(\epsilon_n \epsilon_m) = \begin{cases} E(\epsilon^2) & n = m \\ E(\epsilon)^2 & n \neq m \end{cases} \quad (10)$$

也即这种故意引入的失真, 可使量化误差与原始输入信号独立, 成为服从均匀分布的白噪声。常用在区间 $[-\Delta/2, \Delta/2)$ 均匀分布的信号作为抖动信号, 其特征函数为

$$\Phi_\epsilon(jl) = \frac{2}{l\Delta} \sin \frac{l\Delta}{2} \quad (11)$$

满足对抖动信号的要求。

由第一部分的讨论知, 相位截断过程可视为 $\Delta p = 2\pi/2^W$ 的量化过程, 因而可采用这种抖动量化方法将相位截断误差序列引起的杂散分量“白噪声”化。

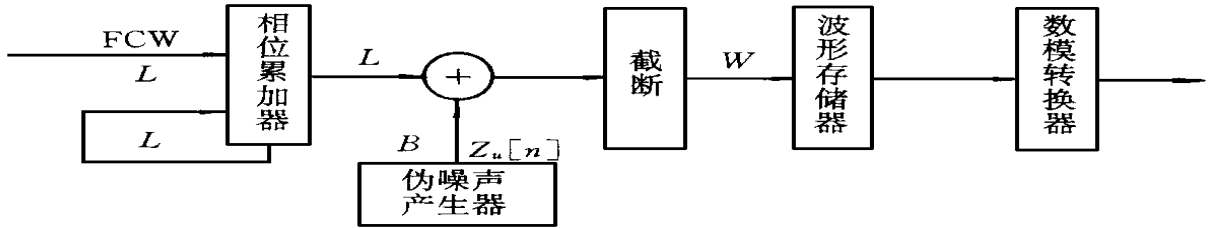


图2 加入抖动后的 DDS 结构

Fig. 2 Block diagram of DDS with phase dithering

图2为加入了相位抖动后的 DDS 结构。若输出频率 f 以每周期的采样数来度量, 则相位截断前的信号为 $\phi_n + Z_u[n]$, 其中 $\phi_n = \langle 2\pi f n + \phi \rangle_{2\pi}$ 是对锯齿波的采样, 幅度界于 $(0, 2\pi)$; $Z_u(n)$ 是在 $[-\Delta p/2, \Delta p/2)$ 均匀分布的白噪声。由于输入 ϕ_n 以有限的 L 位表示, 只有 $Z_u[n]$ 的 $L - W$ 个最高有效位对总和 $\phi_n + Z_u[n]$ 有影响, 因而 $Z_u[n]$ 可用在 $[-\Delta p/2, \Delta p/2)$ 区间均匀分布的 $L - W$ 位量化值 $Z[n]$ 代替。 $Z[n]$ 可以用线性移位寄存器(LFSR)或伪噪声产生器(PN)的产生。当然, 此时对序列的周期长度有一定要求。

如果给相位序列加入了抖动信号, 则 DDS 的输出为:

$$x[n] = \sin(\phi_n + \epsilon[n]) \quad (12)$$

从而有:

$$x[n] = \sin(2\pi f n + \phi + \epsilon[n]) \cos(2\pi f n + \phi - 1/2\epsilon^2[n]) \sin(2\pi f n + \phi) + O(\Delta p^3) \quad (13)$$

由抖动信号 $Z[n]$ 是一个独立同分布序列, 知 $\epsilon[n]$ 与 $\epsilon[n+m]$ 也是独立的($m \neq 0$), 则 $x[n]$ 的自相关函数为:

$$R_{xx}[n, n+m] = E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x[n]\}E\{x[n+m]\} \quad (m \neq 0) \quad (14)$$

从上式可以看出除了底噪声外, 随机过程的频谱信息包含在 $E\{x[n]\}$ 中。又因为 $E\{\epsilon[n]\} = 0$, 从而有:

$$E\{x[n]\} = (1 - 1/2E\{\epsilon^2[n]\}) \sin(2\pi f n + \phi) + O(\Delta p^3) \quad (15)$$

不失一般性, 将均匀分布的抖动随机变量范围移到 $[0, \Delta p)$, 由量化模型知: $\epsilon[n] = -p[n]\Delta p$ 的概率为

$$P\{((\phi_n \bmod \Delta p) + Z[n]) < \Delta p\} = P\{Z[n] < \Delta p - p[n]\Delta p\} \quad (16)$$

而 $\epsilon[n] = (1 - p[n])\Delta p$ 的概率为

$$P\{((\phi_n \bmod \Delta p) + Z[n]) \geq \Delta p\} = P\{Z[n] \geq \Delta p - p[n]\Delta p\} \quad (17)$$

其中 $p[n]\Delta p = \phi_n \bmod \Delta p$, 即 $p[n]$ 为 ϕ_n 与离它最近的量化值之间的距离用 Δp 进行归一化后的结果。

由 $Z[n]$ 在 $[0, \Delta p)$ 均匀分布有:

$$\epsilon[n] = -p[n]\Delta p \text{ 的概率为 } (1 - p[n]);$$

$$\epsilon[n] = (1 - p[n])\Delta^p \text{ 的概率为 } p[n].$$

从而有:

$$E\{\epsilon^2[n]\} = \Delta^p(p[n] - p^2[n]) \tag{18}$$

若记 $r[n] = p[n] - p^2[n]$, 易知 $r[n]$ 介于 $(0, 1/4)$ 之间, 故必有非零的直流分量, 且直流分量的能量为: $Avg(r[n])^2$, 而 $r[n]$ 中时变分量的能量为:

$$Avg(r^2[n]) - Avg(r[n])^2 = Avg((r[n] - Avg(r[n]))^2) \tag{19}$$

最坏情况下, $r[n]$ 中时变分量的能量达到最大. 因采样值是有界的, 故当一半的采样分别位于左右界值处时, 上式取到最大值 $1/64$. 下面用反证法证明满足条件的序列只可能是 $0, 1/4, 0, 1/4, \dots$, 也即:

$$r[n] = 1/8 - 1/8\cos(n\pi) \tag{20}$$

先假设存在一个 n 值使得 $E\{\epsilon^2[n]\} = 0$ 以及 $E\{\epsilon^2[n+1]\} = 0$, 则有 $\epsilon[n] = 0$ 以及 $\epsilon[n+1] = 0$, 这样一来可推出对任意 n 都有 $\epsilon[n] = 0$. 理由如下: $\epsilon[n]$ 与 $\epsilon[n+1]$ 的不同在于相位增量对量化阶距的取余, 若存在 $\epsilon[n] = 0$ 以及 $\epsilon[n+1] = 0$, 则可推知相位增量可用量化阶距准确表示, 那么很显然有: 对任何的 n 都有 $\epsilon[n] = 0$, 这种情况显然不能使 (19) 式取到最大值, 这样也证明了 (20) 式是满足要求的序列. 再根据相位增量与 $p[n]$ 、 Δ^p 、 f 之间的关系, 不难推出其对应于 $(F_{cw}, 2^B) = 2^{B-1}$ 时的情况.

将 (18)、(20) 式代入 (15) 式有:

$$E\{x[n]\} = ((1 - \Delta^p/16) + (\Delta^p/16)\cos(n\pi)) \times \sin(2\pi f n + \phi) + O(\Delta^p^3) \tag{21}$$

从上式很容易得到寄生信号电平与有用信号电平之比 (SpSR) 为:

$$SpSR = \frac{(\Delta^p/16)^2}{(1 - \Delta^p/16)^2} \tag{22}$$

$$\frac{\Delta^p^4}{256} = 7.84 - 12.04W \text{ dBc}$$

通过上面的分析, 可以得到如下的结论: 采用这种相位抖动法, 可使杂散的抑制从每相位位 6dB 增加到每相位位 12dB.

3 实验结果

选择最坏时的情况用计算机仿真手段来验证理论分析结果. 由第二部分的讨论有: 当 $(F_{cw}, 2^B) = 2^{B-1}$ 时, 杂散幅度最大. 另外, 根据 (5) 式知, 此时在 $[0, F_{clk}/2]$ 内仅有两根谱线, 一根为主谱 (位于 $F_{cw} F_{clk}/2^L$ 处), 另一根为杂散 (位于 $F_{clk}/2 - F_{cw} F_{clk}/2^L$ 处). 图 3 是未加抖动信号时的正弦波功率谱, 图 4 是加入了抖动信号时的正弦波功率谱. 各参数选择如下: $L = 11, W = 5, B = 6, F_{cw} = 32$. 用 10 级线性移位寄存器的 6 位输出作为抖动信号, 易知参数满足 $(F_{cw}, 2^B) = 2^{B-1}$ 条件. 图 3 示出未加抖动时杂散比主谱

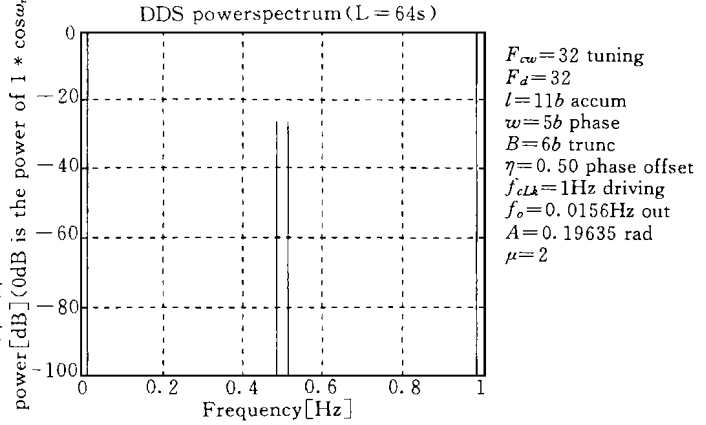


图 3 未加相位抖动信号时的正弦波功率谱
Fig. 3 Power spectrum of sinusoid with out phase dithering

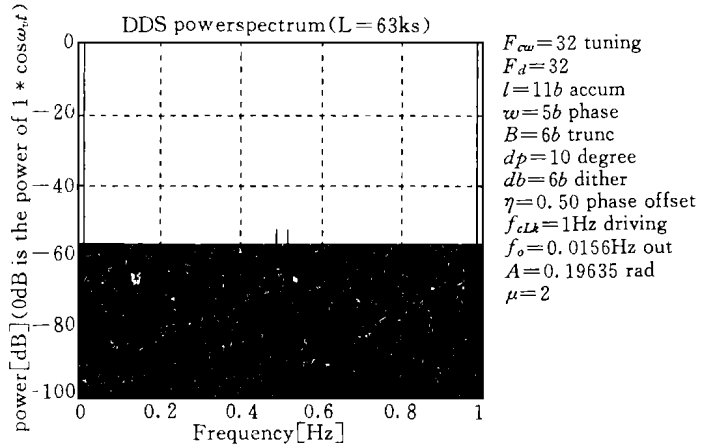


图 4 加入抖动信号后的正弦波功率谱
Fig. 4 Power spectrum of sinusoid with phase dithering

低约 26dB, 从图 4 明显可以看出: 一方面最高的杂散电平降低了约 30dB, 另一方面低噪声却增加了。

4 结束语

本文着重分析了改善输出频谱结构的数字方法——相位抖动法, 得出结论: 若给累加器加入适当的抖动信号, 可使杂散的抑制从每相位位 6dB 增加到每相位位 12dB, 因而这种方法能较好的改善 DDS 的输出频谱。

参考文献

- 1 Sripad A B, Snyder D L. A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White. IEEE Trans. on Acoust. Speech and signal Processing, 1997: ASSP-25
- 2 Gray R M, Stockham T G. Dithered Quantizers. IEEE Trans. On Inform, Theory, 1993: 39
- 3 Michael J. Flanagan, George A. Zimmerman. Spur-reduced Digital Sinusoid Synthesis. IEEE Trans. on Communications, 1995: 43
- 4 Nichols T, Samueli, H. An Analysis of the Output Spectrum of Direct Digital Frequency Synthesizers in the Presence of Phase Accumulator Truncation, 41st. Frequency contrl symposium, 1997
- 5 Robert M. Gray. Quantization Noise spectra, IEEE Trans. on Information Theory 1990: 36

(上接第 58 页)

参考文献

- 1 Daubechies I. Ten Lectures On Wavelets. Rutgers University and AT&T Bell Laboratories, 1992
- 2 Vetterli M and Herley C. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design. IEEE Trans. on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207 ~ 2232
- 3 Mallat S G. A Theory For Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. IEEE Trans. on Patt. Anal. and Machine Intell., 1989, 11(7): 674 ~ 693
- 4 Donoho D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. Biometrika, 1994, 81: 425 ~ 455
- 5 Chambolle A, DeVore R A, Lee Nam-yong, Lucier B J. Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal Through Wavelet Shrinkage. IEEE Trans. on Image Processing, 1998, 7(3): 319 ~ 335
- 6 Shapiro J M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients. IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, 41(12): 3445 ~ 3462
- 7 Witten I H, Neal R and Cleary J G. Arithmetic Coding for Data Compression. Comm. ACM, 1987, 30: 520 ~ 540
- 8 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P and Daubechies I. Image coding using wavelet transform. IEEE Trans. on Image processing, 1992, 1: 205 ~ 220