指数分布下可靠性参数的样条经验 *Bayes* 估计*

李 荣

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 基于可靠性参数的验前密度函数的样条密度估计,本文推导出指数分布失效率和可靠性函数的经验 *Bayes* 估计,并采用数学仿真将其与传统的 *Bayes* 方法,如 *Gamma* 验前分布的情况,进行了比较。仿真结果表明,本文的方法是有效的。

关键词 指数分布,样条密度估计,经验 *Bayes* 估计

分类号 O212.8

Spline Empirical Bayes Estimation for Parameters of Exponential Reliability

Li Rong

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The empirical Bayes estimation is derived for the failure rate parameter and the reliability function in the exponential distribution by considering a spline density estimation. Therefore, numerical example is introduced to conpare the performance of this estimation with the classical Bayes estimation using Gamma prior distribution. The results of the simulation show the algorithm is effective.

Key words exponential distribution, spline density estimation, empirical Bayes estimation

为了克服传统的 Bayes 方法对验前密度函数所作的各种主观假设的局限性。Robbins[1]和 Maritz[2]提出了经验 Bayes 方法的概念,并对其步骤进行了深入地阐述。其后的一些学者通过选择未知参数的不同形式的验前密度估计,而使该方法得到了很好的应用和发展。而关于指数分布,当参数的验前分布假设为无验前信息、均匀分布、Gamma 分布等情况时,都分别得到了可靠性参数的 Bayes 估计,但这些验前分布形式的假设无疑带有很大的主观性。因此 Ciesielski[3]和 Krzykowski[4]提出了一种利用样条函数给出任意验前密度函数的样条密度估计的方法,该方法对验前密度函数不必作任何假设。基于上述的样条密度估计,于本文考虑验前信息为完全试验和定数截尾试验的情况,推导出指数分布下失效率和可靠性函数的估计,并通过仿真将其与传统的 Bayes 估计进行了比较。

1 验前概率密度函数估计

考虑一单元服从指数分布,其概率密度函数为

$$f(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \lambda > 0 \tag{1}$$

假设对其进行了 $n+1$ 次独立的试验,试验类型为完全试验或定数截尾试验。在第 i 次试验中得到了一个由 m 个试验时间组成的随机抽样 $t_{i1}, \cdots, t_{ik}, \cdots, t_{im}$,其中失效数为 k 个(对于完全试验的情况,$k=m$;对于定数截尾试验的情况,$t_{ik+1}=\cdots=t_{im}$)。由其得到的未知失效数 λ 的极大似然估计(MLE)记为 $\hat{\lambda}$。考虑第 $n+1$ 次试验为现在的试验,其余为历史试验。λ 的 MLE 为

$$\hat{\lambda}_i = k / \sum_{j=1}^{m} t_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{2}$$

其为 λ 的一致充分统计量,$\hat{\lambda}$ 的条件概率密度函数为如下的逆 Gamma 分布:

$$f(\hat{\lambda}_i/\lambda) = \frac{(k\lambda)^k}{\Gamma(k)} \hat{\lambda}_i^{-(k+1)} \exp\left(-\frac{k\lambda}{\lambda_i}\right), \hat{\lambda}_i, \lambda > 0 \tag{3}$$

---

* 1998年12月30日收稿
作者:李荣,男,1971年生,博士生

其中 $i=1,2,\cdots,n+1$。$\hat{\lambda}_i,\cdots,\hat{\lambda}_{n+1}$ 是大小为 $n+1$ 的独立同分布(i.i.d.)的简单子样。

在考虑上面验前数据的情况下,Ciesielski[3] 和 Krzykowski[4] 提出了阶数 $r\geq 2$ 的样条密度函数估计,该估计具有较好的优良性。由此,这里引入组成步骤所需的基本公式。

失效率 λ 的验前概率密度函数的 r 阶样条密度函数估计记为 $\hat{\pi}(\lambda)$。根据前面由历史信息获得的简单子样 $\hat{\lambda}_i,\cdots,\hat{\lambda}_n$,可得 r 阶样条密度函数估计 $\hat{\pi}(\lambda)$ 为

$$\hat{\pi}(\lambda)=\sum_{s=s_0}^{s_1}a_{s,h}N_{s,h}^{(r)}(\lambda),\lambda\in\Lambda\subset(0,\infty) \tag{4}$$

这里

$$s_0=\left[\frac{\lambda_{\min}}{h}-v\right]-r,\quad s_1=\left[\frac{\lambda_{\max}}{h}-v\right]+1 \tag{5}$$

其中 $v=0$(如果 r 是偶数),$v=\frac{1}{2}$(如果 r 是奇数)。

$$a_{s,h}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h}N_{s,h}^{(r)}(\hat{\lambda}_j),\quad s=s_0,s_0+1,\cdots,s_1 \tag{6}$$

$$N_{s,h}^{(r)}(\lambda)=\begin{cases}N_1(\lambda) & \text{当 }\lambda\in A_1=[(s+v)h,(s+v+1)h]\\ N_2(\lambda) & \text{当 }\lambda\in A_2=[(s+v+1)h,(s+v+2)h]\\ & \\ N_r(\lambda) & \text{当 }\lambda\in A_1=[(s+v+r-1)h,(s+v+r)h]\\ 0 & \text{当 }\lambda\leq(s+v)h\text{ 或 }\lambda\geq(s+v+r)h\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$N_j(\lambda)=r\sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^{r-i}}{i!\,(r-i)!}\left((s+v+i)-\frac{\lambda}{h}\right)^{r-1},j=1,\cdots,r \tag{8}$$

且 Krzykowski 证明:取如下窗口函数时,$\hat{\pi}(\lambda)$ 在几乎所有 $\lambda\in\Lambda$ 上以概率 1 接近真实的验前密度函数。

$$h=\sqrt{\frac{6}{rn(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\lambda}_j-\bar{\hat{\lambda}})^2} \tag{9}$$

其中 $\bar{\hat{\lambda}}=\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j/n$ 为 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_n$ 的数学平均。

2 可靠性参数的经验 Bayes 估计

在定义了失效率 λ 的充分统计量(3)式及 λ 的验前密度函数的经验 Bayes 估计(4)式后,由 Bayes 公式很容易得到给定 $\hat{\lambda}$ 下 λ 的经验验后密度函数 $\hat{\pi}(\lambda/\hat{\lambda})$

$$\pi(\lambda/\hat{\lambda})=\frac{f(\hat{\lambda}/\lambda)\hat{\pi}(\lambda)}{\int f(\hat{\lambda}/\lambda)\hat{\pi}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda},\lambda>0 \tag{10}$$

注意,从现在起,将用 $\hat{\lambda}$ 代替 $\hat{\lambda}_{n+1}$(由现场数据得到的未知参数 λ 的 MLE 估计)。将(3)、(4)式代入(10)式得

$$\hat{\pi}(\lambda/\hat{\lambda})=\sum_{s_0}^{s_1}a_{s,h}^{*}M_{s,h}^{(r)}(\lambda),\lambda>0 \tag{11}$$

其中

$$M_{s,h}^{(r)}(\lambda)=\lambda^{k}N_{s,h}^{(r)}(\lambda)\exp\left\{-\frac{k\hat{\lambda}}{\lambda}\right\},s=s_0,\cdots,s_1 \tag{12}$$

$$a_{s,h}^{*}=\frac{a_{s,h}}{I(0)},s=s_0,\cdots,s_1 \tag{13}$$

且

$$I(0)=\sum_{s=s_0}^{s_1}a_{s,h}\left\{\int M_{s,h}^{r}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right\}$$

从而可得 λ 的 l 阶经验验后矩(EPM)

$$E[\lambda^l/\hat{\lambda}] = \int_0^\infty \lambda^l \hat{\pi}(\lambda/\hat{\lambda})\mathrm{d}\lambda, \quad l = 1, 2, \cdots \tag{14}$$

将(11)式代入(15)式可得

$$E[\lambda^l/\hat{\lambda}] = \frac{I(l)}{I(0)}, l = 1, 2, \cdots \tag{15}$$

其中

$$I(l) = \sum_{s=s_0}^{s_1} a_{s,h}\left\{\int_0^\infty \lambda^l M_{s,h}^{(r)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right\}, \quad l = 0, 1, \cdots$$

根据 $N_{s,h}^{(r)}(\lambda)$ 的性质,对于不属于如下区间的任意 λ,若 $N_{s,h}^{(r)}(\lambda) = 0$,则 $M_{s,h}^{(r)}\lambda = 0$。

$$[a, b] = [\lambda_{\min} - rh, \lambda_{\max} + rh] \subset [0, \infty) \tag{16}$$

因此 $I(l)$ 可改写为

$$I(l) = \sum_{s=s_0}^{s_1} a_{s,h} I_{s,h}^{(r)}(l), l = 0, 1, \cdots \tag{17}$$

其中

$$I_{s,h}^{(r)}(l) = \int_a^b \lambda^l M_{s,h}^{(r)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda, \quad s = s_0, \cdots, s_1 \tag{18}$$

将(7)、(12)式代入(18)式得

$$I_{s,h}^{(r)}(l) = \sum_{j=1}^{r}\left\{\int_{A_j} \lambda^{k+l} N_j(\lambda)\exp\left\{-\frac{k\hat{\lambda}}{\lambda}\right\}\mathrm{d}\lambda\right\} \tag{19}$$

再将(8)式代入(19)式并交换积分与求和符号,并运用 $\left((s+v+i)-\frac{\lambda}{h}\right)^{r-1}$ 的二项式展开得

$$I_{s,h}^{(r)}(l) = r\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{(-1)^{r-i}}{i!(r-i)!}\sum_{q=0}^{r-1}\binom{r-1}{q}\frac{(s+v+i)^{r-q-1}}{(-h)^q}\left\{\int_{A_j}\lambda^{k+l+q}\exp\left\{-\frac{k\hat{\lambda}}{\lambda}\right\}\mathrm{d}\lambda\right\}\right\} \tag{20}$$

令 $u = k\lambda/\hat{\lambda}$,(20)式中积分项变为

$$\begin{aligned}\int_{A_j}\lambda^{k+l+q}\exp\left\{-\frac{k\hat{\lambda}}{\lambda}\right\}\mathrm{d}\lambda &= \left(\frac{\hat{\lambda}}{k}\right)^{k+l+q+1}\int_{(s+v+j-1)hk/\hat{\lambda}}^{(s+v+j)hk/\hat{\lambda}} u^{k+l+q}\exp\{-u\}\mathrm{d}u \\ &= \left(\frac{\hat{\lambda}}{k}\right)^{k+l+q+1}\Gamma\left(k+l+q+1, \frac{k}{\hat{\lambda}}(s+v+j-1)h, \frac{k}{\hat{\lambda}}(s+v+j)h\right)\end{aligned}$$

其中 $\Gamma(z, a, b)$ 为广义的不完全 Gamma 函数,定义为 $\Gamma(z, a, b) = \int_a^b u^{z-1}\exp\{-u\}\mathrm{d}u = \Gamma(z, b) - \Gamma(z, a)$,而 $\Gamma(z, a)$ 为标准不完全 Gamma 函数。这样 $I_{s,h}^{(r)}(l)$ 的最后形式变为

$$\begin{aligned}I_{s,h}^{(r)}(l) = r\sum_{j=1}^{r}\sum_{q=0}^{r-1}&\left\{\binom{r-1}{q}\left(\frac{\hat{\lambda}}{k}\right)^{k+l+q+1}\times\left\{\sum_{i=j}^{r}\frac{(-1)^{r-i+q}(s+v+i)^{r-q-1}}{i!(r-i)!}\right\}\right. \\ &\left.\times\Gamma\left(k+l+q+1, \frac{k}{\hat{\lambda}}(s+v+j-1)h, \frac{k}{\hat{\lambda}}(s+v+j)h\right)/h^q\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

考虑平方误差损失函数的情况,经验 Bayes 估计即定义为经验验后均值,且由第一阶经验验后矩给出

$$\hat{\lambda}_{EB} = I(1)/I(0) \tag{22}$$

给定 $\hat{\lambda}$ 下 λ 的经验验后方差为

$$\mathrm{Var}_{EB}(\lambda/\hat{\lambda}) = I(2)/I(0) - [I(1)/I(0)]^2 \tag{23}$$

失效率 λ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上限 λ_H 由下式给出

$$\int_0^{\lambda_H}\pi(\lambda/\hat{\lambda})\mathrm{d}\lambda = 1 - \alpha \tag{24}$$

指数分布的可靠性函数定义为

$$R(t) = \exp(-\lambda t), \quad t > 0 \tag{25}$$

因为其为单调函数, 所以将(22) 式的 λ 的估计值代入到(25) 式的 λ 中去, 可得

$$\hat{R}_{EB}(t) = \exp(-\hat{\lambda}_{EB}t) \tag{26}$$

可靠性函数 $R(t)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限为

$$R_L(t) = \exp(-\lambda_H t),\ t > 0 \tag{27}$$

3 仿真实例

考虑如下的例子, 以此检验基于 r 阶样条密度函数的经验 Bayes 估计的可行性和优良性以及考察 r 对估计结果的影响, 现采用如下的仿真步骤:

(1) 假设对失效率为 0.01 的指数分布进行完全寿命试验, 仿真试验次数为 $n=10$, 每次试验所含样本数 $m=20$, 单元的任务时间 $t_0=10$h;

(2) 由(1) 中仿真试验数据, 根据(3) 式可得失效率 λ 的 10 个 MLE $\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_{10}$, 其中 $\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_9$ 为历史数据, 将 $\hat{\lambda}_{10}$ 记为 $\hat{\lambda}$, 当作现在的数据;

(3) 由式(4) 得出在区间$[a, b] = [\hat{\lambda}_{\min} - rh, \hat{\lambda}_{\max} + rh]$ 上 λ 的样条密度函数估计 $\hat{\pi}(\lambda)$;

(4) 由 $\hat{\pi}(\lambda)$ 及式(11) 求得经验验后分布 $\pi(\lambda/\hat{\lambda})$;

(5) 分别由式(22) 和(23) 得出失效率的估计 $\hat{\lambda}_{EB}$ 及其验后风险 $\mathrm{Var}_{EB}(\lambda/\hat{\lambda})$, 由式(26) 得可靠性的经验 Bayes 估计 $\hat{R}_{EB}(t_0)$;

(6) 分别考虑 $r=2, 3, \cdots, 10$ 重复进行(3) -(5) 步;

(7) 重复(1) - (6) 步 1000 次, 可得考虑 r 阶样条密度情况下经验 Bayes 估计 $\hat{\lambda}_{EB}$ 的验后方差的均值 $\mathrm{MPV}^{(r)} = \sum_{i=1}^{1000} \mathrm{Var}_{EB}^{(i)}(\lambda/\hat{\lambda}) / 1000$, 验后方差的均值实际上也就是经验 Bayes 估计 $\hat{\lambda}_{EB}$ 的最小 Bayes 风险的近似值, 通过比较 $\mathrm{MPV}^{(r)}$ 可以分析 r 对估计精度的影响;

(8) 由(1) 中某次仿真试验数据, 考虑验前分布为 Gamma 分布的情况, 应用传统的 Bayes 方法求得(5) 中的各相应参数, 并与由本文算法得到的经验 Bayes 估计相比较。

考虑某次仿真试验数据, 由式(1) 得失效率 λ 的 10 个 MLE $\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_{10}$ 分别为 0.009, 0.008, 0.0078, 0.0109, 0.0108, 0.0083, 0.0066, 0.0104, 0.0094, 0.0132。由上述策略的(3) -(6) 步得可靠性参数的经验 Bayes 估计各参数值, 见表 1。

对于同样的仿真试验数据, 在考虑 Gamma 验前分布情况下, 传统 Bayes 估计的参数值为

$$\hat{\lambda}_G = 0.01042 \quad \mathrm{Var}_G(\lambda/\hat{\lambda}) = 1.99390 \times 10^{-6} \quad \hat{R}_G(10) = 0.90107$$

表 1 点估计及相应的验后风险

Tab. 1 Point estimates and the associated posterior posterior risks

r	$[a, b]$	$\hat{\lambda}_{EB}$	$\mathrm{Var}\times 10^6$	$\hat{R}_{EB}(10)$
2	[0.0049, 0.0126]	0.01014	1.21950	0.90123
3	[0.0045, 0.0130]	0.01014	1.21013	0.90123
4	[0.0042, 0.0133]	0.01014	1.21061	0.9123
5	[0.0039, 0.0136]	0.01014	1.21074	0.90123
6	[0.0036, 0.0139]	0.01014	1.21076	0.90123
7	[0.0034, 0.0141]	0.01014	1.21078	0.90123
8	[0.0030, 0.0145]	0.01014	1.21079	0.90123
9	[0.0028, 0.0147]	0.01014	1.21080	0.90123
10	[0.0026, 0.0149]	0.01014	1.21080	0.90123

从表 1 和上面的数据可以看出, 基于验前分布样条密度函数估计的经验 Bayes 估计较之基于 Gamma 验前分布的传统的 Bayes 估计有较小的验后风险。

同时, 由上述仿真步骤得到近似的 Bayes 风险 $\mathrm{MPV}^{(r)}$, $r=2, 3, 4, 5, 6, 10$, 见表 2。可以看出随着 r 的增大 Bayes 风险减小。这说明高阶的样条密度函数估计的精度更高, 风险更小。

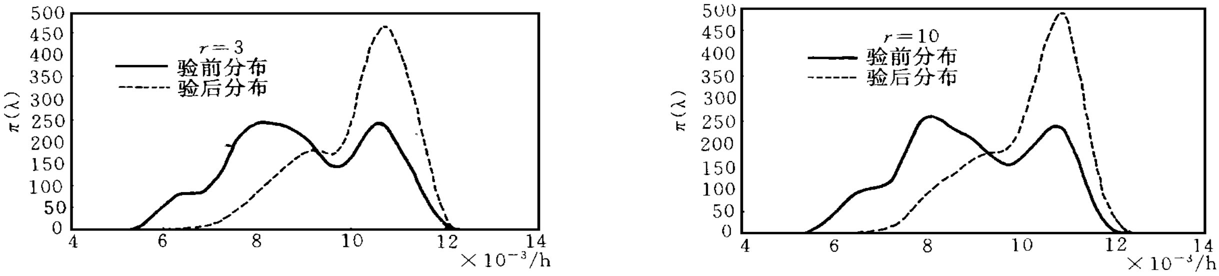

图1 失效率的 r 阶样条密度函数估计及其验后概率密度函数($r=3, 10$)

Fig. 1 The r-th spline density estimate and the associated posterior probability density function when $r=3, 10$.

表2 Bayes 风险

Tab. 2 The Bayes risks

r	2	3	4	5	6	10
$MPV^{(r)}(\times 10^{-6})$	2.4310	2.3820	2.3363	2.2270	2.1136	1.7760

参考文献

1. Robbines, H. The empirical Bayes approach to statistical decision problems, Ann. Math. Statist., 1964, 35: 1～20
2. Matitz, J S. Smooth empirical Bayes estimation for continuous distribution, Biometrika, 1967, 54: 435～450
3. Ciesielski, Z. Asymptotic nonparametric spline density estimation, Probab. Math. Statist., 1991, 12: 1～24
4. Krzyowski, G. Equivalent conditions for the nonparametric spline density estimatiors, Probab. Math. Statist., 1992, 13: 269～276

(上接第 113 页)

参考文献

1 张金槐、唐雪梅. Bayes 方法. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989.9(1992 年修订版).
2 James O. Berger. Statistical Decision Theory. Springer Verlag, New York, 1980
3 Walter, G. G. and Hamedani, G. G. Bayes empirical Bayes estimation for discrete exponential families. Ann. Inst. Statist. Math. 1989 41: 101～119.
4 Maritz, J. S. Empirical Bayes Method. Methuen, London. 1970
5 Walter, G. G. and Hamedani, G. G. Bayes empirical Bayes estimation for natural exponential families with quadratic variance functions. Ann. Statist. 1991 19, (3), 119～1224. 1991
6 Robbins, H. Some thoughts on empirical Bayes estimation. Ann. Statist., 1983, 11: 713～723
7 Jeffreys, H. Theory of probability, 3rd Ed. Oxford Uni. Press, London, 1961
8 Box G. E. P. and Tiao G. G. Bayesian Inference in statistical analysis. Addison-Wesley, Reading. 1973
9 Villegas C. On the representation of ignorance. J. Amer. Statist. Assoc. 1977: 12: 651～654
10 Deely, J. J. and Lindley, D. V. Bayes Empirical Bayes. J. Amer. Statist. Assoc. Vol. 76, 833-841, 1981, 76: 833～841
11 Wilks, S. S. Mathmatical Statistics. John Wiley, 1962
12 张金槐. 利用验前信息时, 飞行器试验鉴定技术研究. 国防科技大学学报., 1996, 18(4)
13 张金槐. 特小子样下, Bayes 方法与仿真在飞行器试验分析中的运用. 系统仿真学报, 1996.8